V – векторное пр-во $V^{\otimes n}$ его n-я тензорная степень.
На $V^{\otimes n}$ действует симметрическая группа S_n перестановками тензорных сомножителей.

$\Lambda^n V \subset V^{\otimes n}$ – пространство антисимм. тензоров:

$$t \in \Lambda^n V \iff \sigma_{ij} t = -t \quad \forall\, i,j = 1,\dots n.$$

$$u \in V^{\otimes n} \Rightarrow \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\ell(\sigma)} \sigma(u) \in \Lambda^n V \qquad \ell(\sigma) \text{ – длина перестановки}$$

Обозначение $v_1,\dots,v_n \in V \Rightarrow$

$$v_1\wedge v_2\wedge\dots\wedge v_n = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\ell(\sigma)} v_{\sigma_1}\otimes v_{\sigma_2}\otimes\dots\otimes v_{\sigma_n} \in \Lambda^n V$$

Пример $v_1\wedge v_2 = v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$

Пусть $e_1,\dots,e_n$ – базис $V \Rightarrow$ $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$, $i_1<i_2\dots<i_k$
– базис $\Lambda^k V$ $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ $n=\dim V$

Внешние степени V образуют ассоциативную суперком-ную алгебру отн-но умножения $\wedge$:

$$(v_1\wedge\dots\wedge v_k)\wedge(u_1\wedge\dots\wedge u_l) = v_1\wedge\dots\wedge v_k\wedge u_1\wedge\dots u_l$$

$$\wedge: \Lambda^k V\otimes \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V: \quad x\wedge y = (-1)^{kl} y\wedge x$$
для $x\in\Lambda^k V$, $y\in \Lambda^l V$

Пусть $A: V\to V$ – линейный оператор. Он порождает оператор $A^{\otimes k}: V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}$: если $A(e_i) = A_i^j e_j$, то

$$A^{\otimes k}(e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_k}) = A_{i_1}^{j_1}\cdot A_{i_2}^{j_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}^{j_k}\, e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_k}$$

$A^{\otimes k}$ переводит подпр-во $\Lambda^k V$ в себя и определяет на нем оператор $A^{\wedge k}: \Lambda^k V \to \Lambda^k V$

Пример $k=2$

$$\underset{i<j}{A^{\otimes 2}}(e_i\wedge e_j) = A^{\otimes 2}(e_i\otimes e_j - e_j\otimes e_i) = (A_i^k A_j^l - A_j^k A_i^l)\, e_k\otimes e_l$$

$$= \sum_{k<l}(A_i^k A_j^l - A_j^k A_i^l)\, e_k\otimes e_l + \sum_{k>l}(A_i^k A_j^l - A_j^k A_i^l)\, e_k\otimes e_l =$$

$$= \sum_{k<l}(A_i^k A_j^l - A_j^k A_k^l)\, e_k\otimes e_l + \sum_{k<l}(A_i^l A_j^k - A_j^l A_i^k)\, e_l\wedge e_k =$$

$= \sum\limits_{k<e} (A_i^k A_j^e - A_j^k A_i^e)\, e_k \wedge e_e = \sum\limits_{k<e} A_{(ij)}^{(ke)} e_k \wedge e_e$

$\Rightarrow$ матрица $A^{\wedge 2}$ размера $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ состоит из миноров 2×2 матрицы A.

Аналогично $A^{\wedge k}$ состоит из миноров $k\times k$ матрицы A

Нас интересует $\Lambda^k V^*$ – k-линейные кососимметр. формы на V. На них умножение $\wedge$ можно записать по-другому: если $\alpha^k \in \Lambda^k V^*$, $\beta^e \in \Lambda^e V^*$, $\xi_1, \dots \xi_{k+e} \in V$, то

$$\alpha^k \wedge \beta^e (\xi_1, \dots, \xi_{k+e}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+e} \\ \sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma_k \\ \sigma_{k+1} < \dots < \sigma_{k+e}}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \dots \xi_{\sigma_k})\, \beta^e(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+e}}) =$$

$$= \frac{k!\, e!}{(k+e)!} \sum_{\sigma \in S_{k+e}} \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \dots \xi_{\sigma_k})\, \beta^e(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+e}})$$

Дифференциальные формы.

M - мн-зие, $p \in M$. Внешней k-формой в точке p наз-ся элемент $\omega^k \in \Lambda^k T_p^* M$. Пр-во внешних k-форм в точке p обозначается $\Omega_p^k M$

$\Leftrightarrow$ k-линейная кососимметричная форма на касат. векторах

Дифференциальной k-формой на M наз-ся гладкое семейство внешних k форм в точках M.

Объединение $\coprod\limits_{p\in M} \Omega_p^k M = \Lambda^k(T^*M)$ образует векторное расслоение над M. Оно является подрасслоением $(T^*M)^{\otimes k}$

$\Rightarrow$ дифференциальная k-форма на M - сечение $\Lambda^k(T^*M)$.

Пространство всех диф. k-форм обозначается $\Omega^k M$.

В локальных координатах базис T_pM – $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, базис $T_p^* M$ – $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ $\Rightarrow$ всякий элемент $\Omega_p^k(M)$ имеет вид

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$$

Соответственно, всякая диф. форма локально имеет вид

$$\omega^k=\sum_{i_1<\dots<i_k}\omega_{i_1\dots i_k}(x)\,dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

где $\omega_{i_1\dots i_k}(x)$ — гладкие ф-ции на $U_\alpha\subset M$

Замена переменных по общему тензорному правилу — подстановкой

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j$$

Если записать формулы перехода матрично, то матрица перехода будет состоять из миноров $(J^t)^{-1}$ $J=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ матрица Якоби.

Примеры

1. 1-форма в $\mathbb{R}^3$ $\omega^1(x)=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$

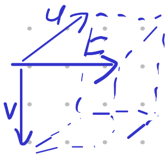
$\omega^1(\bar u)$ $\bar u$ — касат. вектор с коорд-ми (u_x,u_y,u_z)

$\omega^1(u)=F_xu_x+F_yu_y+F_zu_z=(\vec F,\vec u)$

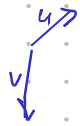
Так что $\int_\gamma\omega^1=\int_{t_0}^{t_1}(\vec F,\dot\gamma)\,dt$ — работа силы.

2. 2-форма в $\mathbb{R}^3$ $\omega^2=F_x\,dy\wedge dz+F_y\,dz\wedge dx+F_z\,dx\wedge dy$

$$\omega^2(u,v)=\det\begin{vmatrix}F_x & F_y & F_z\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=\mathrm{Vol}$$



$=$ поток $\vec F$ через площадку

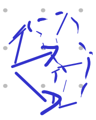


Суммируя по площадкам и переходя к пределу интеграла Римана, получаем

$\iint_S\omega=$ поток поля $\vec F$ через пов-ть S

3. 3 форма $\omega=\rho(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$

$$\omega(\bar u,\bar v,\bar w)=\rho\cdot\det\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\rho\,\mathrm{Vol}$$



$\Rightarrow$

$\iiint_V\omega=$ масса тела плотностью ρ

Внешний дифференциал d

M — C^∞-мн-дие. Внешним диф-лом $d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $k=0,1,\ldots$ наз-ся линейный оператор такой, что

1. $d: \Omega^0(M) = \mathrm{Fun}(M) \to \Omega^1(M)$ есть диф-л функции
2. $d(\omega^k \wedge \omega^l) = d(\omega^k)\wedge\omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d(\omega^l)$
3) $d^2 = d\circ d = 0$

<u>Теорема</u> d существует и единственен.

Докажем вначале единственность.

Локально $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$

$$d\omega = (d\omega_{i_1\ldots i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} + \omega_{i_1\ldots i_k}\underbrace{d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})}_{=0 \text{ по } 2,3} =$$

$$= \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} \qquad (*)$$

Теперь проверим, что ф-ла $(*)$ уд-ет 2,3.

2. Пусть $\omega_1 = \alpha_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$, $\omega_2 = \beta_{j_1\ldots j_l} dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}$

$$d(\omega_1\wedge\omega_2) = d(\alpha_{i_1\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_l}) dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$$

$$\frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^m}\beta_{j_1\ldots j_l} dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} +$$

$$\alpha_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial \beta_{j_1\ldots j_m}}{\partial x^m} dx^m\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$$

$(-1)^k$

$$= d\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^k \omega_1\wedge d\omega_2$$

3. $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_k} x^1\wedge\ldots\wedge x^k \Rightarrow d\omega = \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$

$$d^2\omega = \frac{\partial^2\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^l \partial x^j} dx^l\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

симметрично по j, l

антисим-но по j, l

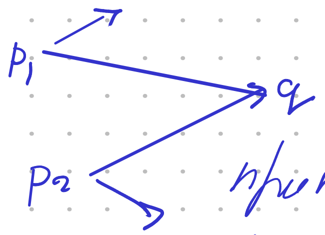
$\Rightarrow$ сумма нулевая

Итак, в каждой локальной карте оператор d построен. Рассмотрим 2 карты U_α и U_β. Пусть ω – дифф-ная форма на M. Тогда на $U_\alpha \cap U_\beta$ мы построили 2 диф-ла для $\omega|_{U_\alpha \cap U_\beta}$: один в карте U_α и ее координатах; другой в карте U_β. По единственности они совпадают $\Rightarrow$

d глобально определен.

Пусть $f: M \to N$ – гладкое отобр. мн-дий. df отображает $T_p M$ в $T_{f(p)} N$. Однако, df не отображает векторные поля в векторные поля.

Причина:



если $f(p_1) = f(p_2) = q$, то какой вектор приписать к q: $df(X_{p_1})$ или $df(X_{p_2})$?

Однако, определен обратный образ $f^* := (df)^*$ 1-форм: если $\omega \in \Omega^1(N)$, то для $\xi \in T_p M$

$$f^*\omega(\xi) = \omega_{f(p)}(df(\xi))$$

Это же верно для полилинейных форм $\omega \in \Omega^k(N)$, $\xi_1, \dots \xi_k \in T_p M$

$$f^*\omega(\xi_1, \dots \xi_k) = \omega_{f(p)}(df(\xi_1), \dots, df(\xi_k))$$

Это отображение также обозначается

$$f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$

Теорема $\quad d_M f^* = f^* d_N$

Док-во следует из единственности d и "инвариантности формы 1-го дифф-ла":

$d(y(x)) = dy \circ dx$.

Инв-ть 1-го дифференциала по другому может быть прочитана как утверждение теоремы для диф-лов функций:

$$f^* d_N g = d_M f^* g$$ для гладкой функции $g: N \to \mathbb{R}$

Рассмотрим $\omega = \omega_{j_1 \dots j_q}(y) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q} \in \Omega^q(N)$

Тогда $d_N \omega = d\omega_{j_1 \dots j_q}(y) \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}$

$$f^* d_N \omega = d\omega_{j_1 \dots j_k}(y(x)) \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}$$

$$f^* \omega = \omega_{j_1 \dots j_q}(y(x)) \, dy^{j_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{j_q}(x)$$

$$d_M f^* \omega = d\omega_{j_1 \dots j_q}(y(x)) \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}$$

Таким образом, эта теорема есть следствие теоремы о производной сложной функции и свойств 2), 3) внешнего дифференциала.