

## Семинар 8

1. Рассмотрим неприводимое комплексное представление аддитивной группы трехмерного векторного пространства  $V$  над полем из семи элементов. Доказать, что ядро этого представления есть подпространство в  $V$ . Найти его размерность.

2. Доказать, что неприводимое представление циклической группы пятого порядка над полем из 5 элементов тривиально.

3. Разложите тензорные произведения неприводимых представлений группы  $S_3$ .

4. Разложите тензорные произведения неприводимых представлений группы  $A_4$ .

5. Мы знаем два одномерных и два трехмерных (группой симметрий тетраэдра и группой вращений куба) неприводимых комплексных представлений группы  $S_4$ . Но их должно быть 5 (почему?). Найти размерность и характер оставшегося неприводимого представления.

6 (трудно, но все еще можно). Рассмотрим группу  $G$  аффинных преобразований аффинной прямой над конечным полем из  $q$  элементов, и пусть  $T$  естественное представление группы  $G$  в пространстве комплекснозначных функций на прямой. Вычислить характер представления  $T$  и попробовать разложить  $T$  на неприводимые.

7\*. Доказать, что следующие свойства (комплексного) представления  $T$  конечной группы  $G$  равносильны:

- 1) Спектр представления  $T$  простой (т.е. его неприводимые компоненты входят с кратностью единица);
- 2) Алгебра  $\text{Hom}_G(T, T)$  коммутативна;
- 3) Разложение пространства представления на неприводимые пространства однозначно.