ЛИнЕЙноЕ проГрАММИроВАнИЕ

А.В. Колесников

Содержание

1. Теория графов и теорема Бирхгофа.

Определение 1.1. *Матрица a_{ij} называется бистохастической, если она удовлетворяет соотношениям.*

$$\sum_i a_{ij} = 1$$

$$\sum_j a_{ij} = 1$$

$$a_{ij} \geq 0.$$

Теорема 1.2. (Теорема Бирхгофа) *Матрица является бистохастической тогда и тошлько тогда, когда она является выпуклой комбинацией перестановочных матриц.*

Доказательство. Очевидно, любая выпуклая комбинация перестановочных матриц бистохастична.

Докажем обратное. Применим индукцию по n. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ многогранник P. Достаточно доказать, что любая вершина из P представляется выпуклой комбинацией перестановочных матриц. Пусть A — вершина в P, тогда n^2 линейно независимых ограничений обращаются в точке A в равенство. Поскольку первые $2n$ ограничений линейно зависимы, то по крайней мере n^2-2n+1 элементов a_{ij} равны нулю. Отсюда следует, что в A имеется строка с $n-1$ нулями и одной единицей. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11}=1$, а все остальные элементы в первом столбце и первой строке — нулевые. Удалив из матрицы первую строку и первый столбец, получим бистохастическую матрицу порядка $(n-1)\times(n-1)$, являющуюся по предположению индукции выпуклой комбинацией перестановочных матриц. То же самое верно и для A. □

Отступление. Теорема Крейна–Мильмана. Теорема де Финетти. Крайние точки бистохастичесих мер.

Рассмотрим так называемый двудольный граф, состоящий из конечных множеств X, Y (вершин). Каждая пара вершин может быть связана ребром, но может быть и не связана. Двудольный граф удобно представлять себе как матрицу размера $n\times m$, где $n=\mathrm{card(X)}$, $m=\mathrm{card(Y)}$, каждая строчка соответствует некоторому элементу X, а каждый столбец соответствует некоторому элементу Y. Если элементы связаны ребром, то в соответствующий элемент матрицы равен 1, в противном случае матричный элемент равен 0.

Вершинным покрытием графа называется такое множество C некоторых вершин X и Y, что всякое ребро имеет хотя бы одну вершину в C. Наименьшим вершинным покрытием называется вершинное покрытие наименьшей возможной мощности (оно может быть неединственным). Паросочетанием в графе называется множество ребер, не имеющих общих конечных вершин. Паросочетание с максимально возможным количеством ребер называется наибольшим.

Теорема 1.3. (Кёниг) *Число ребер в наибольшем паросочетании двудольного графа равно числу вершин в наименьшем вершинном покрытии.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что X, Y содержат одинаковое число элементов, равное n (если это не так, то можно дополнить меньшее множество элементами, не связанными ребрами с элементами другого множества).

На пространстве $X \times Y$ рассмотрим функцию стоимости c, равную 1, если элементы связаны ребром, и 0, если не связаны. Рассмотрим транспортную задачу

$$\sum c(x_i, y_i)\pi_{ij} \to \max \tag{1}$$

$$\sum_i \pi_{ij} = 1,\ \sum_j \pi_{ij} = 1, \pi_{ij} \geq 0.$$

В силу теоремы о двойственности значение задачи равно

$$J = \min_{c_{ij} \leq u_i + v_j} \Big(\sum_i u_i + \sum_j v_j\Big).$$

Покажем, что без ограничения общности можно считать далее, что $0 \leq u_i, v_j \leq 1$. Действительно, так как $u_i + v_j \geq 0$ для всех i, j, то $\min_i u_i + \min_j v_j \geq 0$. Пусть для определенности $a = \min u_i \geq 0$. Тогда $\widetilde{u}_i = u_i - a, \widetilde{v}_j = v_j + a$ — неотрицательные наборы чисел, удовлетворяющие нужному ограничению. Так как $c_{i,j} \leq 1$, то отсюда следует, что все $\min\{\widetilde{u}_i, 1\}, \min\{\widetilde{v}_j, 1\}$ тоже удовлетворяют нужному ограничению.

Пусть M — число вершин в наименьшем вершинном покрытии. По определению $M = \inf_{c_{ij} \leq \widehat{u}_i + \widehat{v}_j} \big(\sum_i \widehat{u}_i + \sum_j \widehat{v}_j\big)$ при дополнительном предположении, что $\widehat{u}_i, \widehat{v}_j \in \{0, 1\}$. Отсюда следует, что $J \leq M$. Пусть $0 \leq t \leq 1$. Положим $u_{t,i} = I_{\{u_i \geq t\}}, v_{t,j} = I_{\{v_j \geq 1-t\}}$. Ясно, что $u_{t,i} + v_{t,j} \geq c_{ij}$, поэтому

$$M \leq \sum_i u_{t,i} + \sum_j v_{t,j}.$$

Проинтегрировав обе части равенства по t, из соотношений

$$\int_0^1 u_{t,i}\, dt = u_i, \quad \int_0^1 v_{t,j}\, dt = v_j$$

получим равенство $M \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = J$. Поэтому $J = M$ и

$$M = \max \sum_{i,j} c_{ij}\pi_{ij},$$

где максимум берется по всем бистохастическим матрицам. По теореме Бирхгофа все бистохастические матрицы представляются в виде выпуклых комбинаций перестановочных матриц. Но тогда существует перестановочная матрица, на которой достигается максимум функционала (1), равный, как мы убедились, величине M. Из определения функционала (1) и перестановочности матрицы следует, что его значение равно в точности числу ребер в наибольшем паросочетании. □

Следствие 1.4. Теорема Холла (теорема о свадьбах). *Если в двудольном графе с равномощными долями для любого положительного k любые k элементов первой из долей связаны по крайней мере с k элементами другой, то вершины разбиваются на пары смежных (т.е., соединенных одним ребром).*

Покажем теперь, что теорема Бирхгофа следует из теоремы Холла.

Теорема 1.5. (Теорема Бирхгофа) *Матрица является бистохастической, если она является выпуклой комбинацией перестановочных матриц.*

Доказательство. Нарисуем поверх бистохастической матрицы таблицу $n \times n$. Отметим в ней клетки, соответствующие ненулевым элементам матрицы и отождествим полученную таблицу с двудольным графом с равными долями (если в матрице элемент отмечен, то это значит, что соответствующие элементы долей связаны ребром).

Проверим, что для этого графа выполнено условие леммы Холла. Будем доказывать от противного. Если в k столбцах отмеченные клетки принадлежат меньше, чем k строкам, то сумма элементов в этих строках не меньше, чем в отмеченных клетках на пересечении упомянутых строк и столбцов. А эти отмеченные клетки содержат всю сумму чисел в k столбцах. Но суммы чисел во всех рядах одинаковы. Получаем противоречие. Тогда в силу леммы Холла есть n отмеченных клеток, никакие две из которых не лежат в одном ряду. Им соответствует какая-то перестановочная матрица A. Пусть минимальное число в отмеченных клетках равно a. Тогда, если мы нашу матрицу уменьшим на aA, то получим матрицу, у которой по-прежнему сумма чисел во всех рядах одинакова, а все числа неотрицательны, но при этом нулевых чисел больше. Проделав эту процедуру несколько раз мы придём к нулевой матрице. Таким образом, мы смогли разложить бистохастическую матрицу в линейную комбинацию перестановочных с положительными коэффициентами. При этом очевидно, что сумма коэффициентов равна 1, так как в каждой бистохастической матрице сумма элементов равна n, то есть это выпуклая комбинация. □

2. Теорема Форда-Фалькерсона. Целочисленные решения

[материал: [1], [2]].

Определение 2.1. *Граф G называется ориентированным, если для каждого ребра указано направление, т.е., начальная и конечная вершина.*

Обозначение:

$$e = (u, v)$$

обозначает вершину e с началом u и концом v.

Определение 2.2. *Граф G называется взвешенным, если для каждого ребра e дано неотрицательное число $w(e)$, называемое весом или пропускной способностью.*

Далее, G — взвешенный ориентированный граф с двумя выделенными несмежными вершинами s (источник), t (сток).

Определение 2.3. *Потоком на G называется такая функция f на множестве ребер $E(G)$, что*

$$0 \le f(e) \le w(e)$$

и для любой вершины $v \neq s, v \neq t$ "дивергенция" потока в вершине v равна нулю

$$\Delta(v) = \sum_{u \in G, e=(u,v) \in E(G)} f(e) - \sum_{u \in G, e=(v,u) \in E(G)} f(e) = 0.$$

Величина

$$\Delta(t) = \sum_{u \in G, e=(u,t) \in E(G)} f(e) - \sum_{u \in G, e=(t,u) \in E(G)} f(e)$$

называется величиной потока. Нетрудно доказать, что

$$\Delta(s) = -\Delta(t).$$

Определение 2.4. *Разрезом называется такое разбиение вершин на два множества S, T, что $s \in S$, $t \in T$.*

Пропускная способность разреза: сумма пропускных способностей всех его ребер, направленных их S в T.

Лемма 2.5.

$$\Delta(t) = \sum_{u\in S, v\in T, e=(u,v)\in G} f(e) - \sum_{u\in S, v\in T, e=(v,u)\in G} f(e)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta(t) = -\Delta(s) &= \sum_{u\in G, e=(s,u)\in E(G)} f(e) - \sum_{u\in G, e=(u,s)\in E(G)} f(e) \\
&= \sum_{u\in G, e=(s,u)\in E(G)} f(e) - \sum_{u\in G, e=(u,s)\in E(G)} f(e) + \sum_{a\in S\setminus s} \Big(\sum_{\omega} f(a,\omega) - \sum_{v} f(v,a)\Big) \\
&= \sum_{a\in S} \Big(\sum_{\omega} f(a,\omega) - \sum_{v} f(v,a)\Big) \\
&= \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in S} f(a,\omega) + \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in T} f(a,\omega) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in S} f(v,a) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in T} f(v,a) \\
&= \sum_{a\in S}\sum_{\omega\in T} f(a,\omega) - \sum_{a\in S}\sum_{v\in T} f(v,a).
\end{aligned}$$

□

Далее мы будем использовать теорему о двойственности в форме леммы **??** : задача

$$\langle c, x\rangle \to \max$$
$$Ax \le b$$

двойственна задаче

$$\langle b, y\rangle \to \min,$$
$$y \ge 0$$
$$A^T y = c.$$

Нам понадобится **условие дополняющей нежёсткости**: если x, y — решения прямой и двойственной задач, то выполнено соотношение

$$\langle y, b - Ax\rangle = 0.$$

В частности, значения двойственных переменных y_j, соответствующих индексам j со свойством $b_j - (Ax)_j > 0$ равны нулю.

Теорема 2.6. *Максимальная величина потока в графе равна минимальной пропускной способности разреза.*

Доказательство. Из леммы 2.5 следует, что

$$\Delta(t) \le \sum_{u\in S, v\in T, e=(u,v)\in E(G)} f(e).$$

Сформулируем задачу о максимальном потоке в виде задачи линейного программирования. Введем дополнительное ребро с неограниченной пропускной способностью из t в s и продолжим f так, чтобы в расширенном графе было выполнено $f((t,s)) = \Delta(t)$, т.е., все дивергенции были бы равны нулю. Введем дополнительные неотрицательные переменные $s(e)$ со свойством $f(e) + s(e) = w(e)$. Получаем задачу в виде

$$-f((t,s)) \to \min$$
$$f(e) \ge 0,\ s(e) \ge 0$$
$$Af = 0,$$

$$f(e) + s(e) = w(e),\ e \in E(G).$$

Матрица $A(v,e), e \in E(G), v \in G$ — матрица инциденций рёбер и вершин: $A_{(v,e)} = 1$, если v — начало ребра e, $A_{(v,e)} = -1$, если v — конец ребра e, $A_{(v,e)} = 0$ в противном случае.

Соответствующую задачу представим в виде

$$\langle b, r \rangle \to \min,\ \tilde{A}^T r = c,\ r \geq 0,$$

где

$$r = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_N) \\ s(e_1) \\ \vdots \\ s(e_N) \end{pmatrix}$$

и $e_N = (s,t)$, $-b$ совпадает с N-м единичным координатным вектором,

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{E} \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{E}$ — матрица $N \times N$, совпадающая с единичной, кроме последней строчки, где она равна нулю, A — матрица инциденций размера $M \times N$, где M— число вершин, символ 0 обозначает нулевую матрицу размером $M \times N$.

$$c = \begin{pmatrix} w(e_1) \\ \vdots \\ w(e_{N-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\omega = (-y(e_1), -y(e_2), \cdots, -y(e_N), -z(v_1), \cdots, -z(v_M))$$

двойственные переменные. Тогда двойственная задача $\langle \omega, c \rangle \to \max, \tilde{A}\omega \leq b$ принимает вид вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} y(e_i) w(e_i) \to \min$$
$$z_t - z_s \geq 1$$
$$y_{(u,v)} + z_u - z_v \geq 0, (u,v) = e \in E(G)$$
$$y_{(u,v)} \geq 0, (u,v) = e \in E(G).$$

Добавление числа к переменным z_v не меняет задачи, поэтому полагаем $z_t = 1$.

Пусть (f^*, s^*), (y^*, z^*) — оптимальные решения прямой и двойственной задач соответственно,

$$T = \{v : z_v \geq 1\},$$
$$S = V(G) \setminus T.$$

Если $e = (u,v), u \in T, v \in S$, то $z_u^* - z_v^* > 0$, $y_{(u,v)}^* \geq 0$, поэтому $y^*(u,v) + z_u^* - z_v^* > 0$ и из условия дополняющей нежёсткости получаем, что $f^*(e) = 0$.

Если $e = (u,v), u \in S, v \in T$, то $z_u^* - z_v^* < 0$, следовательно $y_{(u,v)}^* > 0$ и из условия дополняющей нежёсткости получаем, что $s^*(e) = 0$ и тогда $f^*(e) = w(e)$.

Таким образом, если ребро ведет из S в T, то $f^* = w$ и нулю, если из T в S. Поэтому в силу леммы величина потока совпадает с пропускной способностью разреза. Это доказывает утверждение теоремы. □

Настоящая задача имеет целочисленное решение, если пропускные способности ребер целые.

Определение 2.7. *Матрица A называется абсолютно унимодулярной, если все ее миноры равны 0, 1 или -1.*

Из формул Крамера и следствия **??** вытекает теорема о целочисленности вершин.

Теорема 2.8. *Пусть A — абсолютно унимодулярная матрица, b — целочисленный вектор, а полиэдр задаётся неравенствами $x \geq 0$ и $Ax \leq b$. Тогда вершины имеют целочисленные координаты.*

Лемма 2.9. *Пусть в каждом столбце матрицы ровно два ненулевых элемнента 1 и -1. Тогда она является абсолютно унимодулярной.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку минора. База индукции очевидна.

Шаг индукции: рассмотрим минор M размера $k \times k$, предполагая, что все миноры меньшего размера равны 0, 1 или -1. Если в M есть нулевой столбец, то $M = 0$. Если в некотором столбце минора ровно одна единица или минус единица, то разложим минор по этому столбцу и получим с некоторым знаком минор меньшего размера. Если в каждом столбце минора есть и $+1$ и -1, то сумма строк минора есть нулевая строка и он равен 0. □

Следствие 2.10. *Если пропускные способности графа целые, то решение задачи о максимальном потоке является целым.*

Внимание. Настоящие следствие не является прямым следствием теоремы 2.8, потому что ограничения задачи о максимальном потоке не описываются только абсолютно унимодулярной матрицей A. Тем не менее, модифицируя рассуждение теоремы 2.8, можно доказать предыдущее следствие.

Следующий результат теории графов является следствием теоремы Форда–Фалькерсона и теоремы 2.8.

Теорема 2.11. *(Теорема Менгера). Пусть G — ориентированный граф с несмежными вершинами s, t. Тогда максимальное количество путей, не имеющих общих ребер, идущих их s в t, равно числу минимальному числу ребер, которые надо удалить, чтобы s и t не были связаны ни одним путем.*

Список литературы

[1] Вялый М.Н., Линейные неравенства и комбинаторика
[2] Схрейвер А., Теория целочисленного и линейного программирования.
[3] Циглер Г., Теория многогранников.
[4] Adams D.R. and Hedberg L.I., Function spaces and potential theory
[5] Ferguson S.T. Linear programming. A Concise Introduction.
[6] Ferguson S.T. Game theory.
[7] Vanderbrei R.J., Linear Programming: Foundations and Extensions.