

## Вершины и грани многогранников

- (1) Многогранником Бирхгофа называется выпуклая оболочка перестановочных матриц, т.е., матрица вида  $X_{ij} = 1$  если  $\sigma(i) = j$  и  $X_{ij} = 0$  иначе, где  $\sigma$  — перестановка из  $n$  элементов. Сколько у него вершин? Докажите, что его размерность равна  $(n - 1)^2$ . Найдите  $n^2$  гиперграней этого многогранника.
- (2) Пусть  $P$  — многогранник в  $\mathbb{R}^4$ , являющийся выпуклой оболочкой точек вида  $V_i = (i, i^2, i^3, i^4)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Докажите, что каждая точка  $V_i$  является вершиной, причем любые две вершины соединены ребром.
- (3) \*Пусть  $P$  — пермutoэдр, т.е. выпуклая оболочка векторов, полученных перестановками вектора  $(1, 2, \dots, n)$ . 1) найдите систему неравенств, описывающую  $P$ , 2) докажите, что у  $P$  ровно  $2^n - 2$  гиперграни.
- (4) \*Докажите теорему Карра. Пусть заданы числа  $c_i$  и функции  $f_i$  на  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим множество  $K$  неотрицательных мер  $\mu$  со свойством  $\int f_i d\mu = c_i$ . Докажите, что следующие утверждения эквивалентны
  - $\mu$  является крайней точкой в  $K$
  - Носитель меры содержит не более, чем  $n + 1$  точку и если  $\{x_1, \dots, x_k\}$  — носитель меры, то векторы  $(f_1(x_i), \dots, f_n(x_i), 1)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , линейно независимы.