

Двудольные графы. Теорема Форда–Фалькерсона. Целочисленные решения.

- (1) Выведите из теоремы Кёнига теорему Холла (теорему о свадьбах): если в двудольном графе с равномошными долями для любого положительного k любые k элементов первой из долей связаны по крайней мере с k элементами другой, то вершины разбиваются на пары смежных (т.е., соединенных одним ребром).
- (2) По индийским традициям кшатрий может иметь трёх жен, а каждая женщина лишь одного мужа. Известно, что для любого k любые k кшатриев симпатизируют хотя бы $3k$ индийским женщинам. Докажите, что можно поженить каждого кшатрия на трёх женщинах, которым он симпатизирует.
- (3) *Выведите из теоремы Кёнига теорему Дилуорса
Теорема Дилуорса. Минимальное число цепей, которые в совокупности содержат все элементы конечного частично упорядоченного множества M , равно максимально возможному числу элементов в подмножестве A множества M , состоящем из попарно несравнимых элементов (антицепей).
- (4) Докажите, что среди 26 натуральных чисел, меньших 50, одно обязательно делится на другое.
- (5) Выведите из теоремы Дилуорса теорему Кёнига
- (6) Двудольный граф (V_1, V_2) называется k -регулярным, если каждая вершина имеет ровно k соседей. Докажите, что в регулярном графе существует совершенное паросочетание, т.е., паросочетание, покрывающее все вершины первой доли.
- (7) *Рёберно-хроматическое число графа — это наименьшее число цветов, которыми можно раскрасить его рёбра так, чтобы смежные рёбра были разного цвета.
Докажите, что для двудольного графа рёберно-хроматическое число равно наибольшей степени его вершины.
- (8) Вывести теорему Кёнига из теоремы Форда–Фалькерсона.
- (9) Проверить целочисленность задачи поиска максимального паросочетания, используя унимодулярность соответствующей матрицы. Сформулировать двойственную и получить отсюда теорему Кёнига.