

ЛИСТОК 3, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СРОК СДАЧИ — ДО 18 ДЕКАБРЯ 2021 ГОДА

1. Доказать, что для выпуклой на промежутке J функции f при всех $x_1, \dots, x_n \in J$ и $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ с $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ верно неравенство

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n).$$

2. Пусть f и g — выпуклые функции на прямой, причем g возрастающая. Доказать, что композиция $g \circ f$ также выпукла.

3. Доказать, что всякая выпуклая функция непрерывна.

4. Пусть $H(x) = e^{x^2}$. Доказать, что функция $e^{-x^2} H^{(n)}(x)$ — многочлен.

5. Пусть функция f имеет две непрерывные производные, $f(0) = f(1) = 0$ и $f''(x) \leq 1$ для всех $x \in [0, 1]$. Найдите наибольшее возможное значение f на $[0, 1]$.

6. Пусть функция f трижды дифференцируема. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - 3f(2x) + 3f(x) - f(0)}{x^3}.$$

7. В эллипс $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ вписать прямоугольник наибольшей площади, стороны которого параллельны осям эллипса.

8. Пусть ряды $\sum_n a_n x^n$ и $\sum_n a_n x^n$ сходятся при всех $x \in [0, 1)$. Верно ли, что ряд $\sum_n a_n b_n x^n$ сходится при всех $x \in [0, 1)$?

9. Пусть $f(x, y) = x^2 y / (x^4 + y^2)$ при $x^2 + y^2 > 0$, $f(0, 0) = 0$. Непрерывна ли функция f ?

10. Пусть $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Дифференцируема ли функция f в нуле?