

ЛИСТОК СЕМИНАРОВ 9.

1. Доказать неравенства: (i) $e^x \geq 1 + x$ при $x \geq 0$, (ii) $x - x^2/2 \leq \ln(1 + x) \leq x$ при $x \geq 0$, (iii) $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$ при $x \geq 0$, (iv) $x^\alpha - 1 \geq \alpha(x - 1)$ при $x \geq 1, \alpha \geq 2$. (v) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} \geq (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta$.

2. Пусть f и g — дифференцируемые функции на прямой, причем g возрастает и $|f'(x)| \leq g'(x)$. Доказать, что $|f(x) - f(y)| \leq g(x) - g(y)$ при $x \geq y$.

3. Пусть f — непостоянная рациональная функция. Доказать, что найдется такое число $R > 0$, что на лучах $(-\infty, -R]$ и $[R, +\infty)$ функция f строго монотонна.

4. Пусть f — выпуклая функция на $[0, 1]$. Верно ли, что найдется интервал в $[0, 1]$, в каждой точке которого существует f' ?

5. Разложить в ряд Тейлора в нуле: (i) $\sin \sin x$ до x^6 , (ii) $\frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ до x^4 , (iii) $\sqrt{1 - \sin x}$ до x^3 , (iv) $\ln \cos x$ до x^4 , (v) $\frac{x}{e^x - 1}$ до x^4 .

6. (i) Пусть функция f трижды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдется интервал, на котором она выпукла или вогнута? (ii) Пусть функция f дважды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдется интервал, на котором она выпукла или вогнута?