Листок 3
ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ
ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ ЭНЕРГИИ, ПОЛЯ ЯКОБИ

1. Пусть γ – геодезическая. Докажите, что для всякого векторного полу Y вдоль γ
$$\nabla_{\dot\gamma} Y^{\top} = (\nabla_{\dot\gamma} Y)^{\top}, \quad \nabla_{\dot\gamma} Y^{\perp} = (\nabla_{\dot\gamma} Y)^{\perp}.$$
Выедите отсюда, что если поле Y нормальное вдоль γ, то нормальными являются также и все поля вида $\nabla_{\dot\gamma} Y, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} Y, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} Y, \cdots$.

2. Пусть (M, g) – нечетномерное замкнутое риманово многообразие положительной кривизны. Докажите, что оно ориентируемо.

Указание: воспользуйтесь идеей доказательства теоремы Синга.

3. Докажите следующее обобщение теоремы Бонне-Майерса. Пусть (M, g) – полное риманово многообразие такое, что существуют константы $a > 0$ и $c \geqslant 0$ такие, что для любой геодезической γ, параметризованной натурально верно, что
$$Ric(\dot\gamma(t)) \geqslant a + \frac{df(t)}{dt} \text{ вдоль } \gamma,$$
где f – дифференируемая функция от t, для которой $|f(t)| \leqslant c$ вдоль γ. Докажите, что M компактно. Найдите, оценку на диаметр (M, g). Заметьте, что теорема Бонне-Майерса соответсвует случаю $f = 0, c = 0$.

4. Пусть $\gamma\colon [0, a] \to (M, g)$ – геодезическая параметризованная натурально, а Y – поле Якоби вдоль неё. Пусть Z – гладкое векторное поле вдоль γ такое, что $Y(0) = Z(0) = 0$ и $Y(a) = Z(a)$. Предположим также, что на γ нет точек, сопряжённых с $\gamma(0)$.

(а) Докажите, что
$$S(Y, Y) \leqslant S(Z, Z).$$
Здесь S – квадратичная форма второй вариации функционала энергии.

(б) Выведите из (а), что форма S положительно определена на всех гладких полях вдоль γ Z, для которых $Z(0) = Z(a) = 0$. Докажите также, что если форма положительно определена на всех гладких полях вдоль γ, то выполняется неравенство в (а).

Указание: сравните поле Z с тривиальным полем Якоби $Y \equiv 0$.

(в) Докажите, что если на геодезической γ есть точка, сопряженная с $\gamma(0)$, то она не может быть кратчайшей.

Указание: Рассмотрите поле $W = Y + \lambda Z$ вдоль γ.

5. Риманово многообразие (M, g) называется локально симметрическим, если его тензор кривизны параллелен, т.е. $\nabla R = 0$.

(а) Покажите, что если $\gamma\colon [0, 1] \to (M, g)$ – геодезическая в локально симметрическом многообразии и поля X, Y, Z параллельны вдоль γ, то $R(X, Y)Z$ – параллельное вдоль γ поле.

(б) Пусть $\gamma\colon [0, \infty) \to (M, g)$ – геодезическая в локально симметрическом многообразии и $v = \dot\gamma(0)$ – её скорость в точке $p = \gamma(0)$. Определим линейное преобразование $K_v\colon T_pM \to T_pM$, полагая
$$K_v(X) = R(v, X), v \ X \in T_pM.$$
Докажите, что K_v – самосопряженное преобразование.

(в) Выберите диагонализующий K_v ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в T_pM, т.е.
$$K_v(e_i) = \lambda_i e_i, \ i = \overline{1, n}.$$

Продолжите этот базис до полей $\{E_i\}_{i=1}^n$ вдоль геодезической γ при помощи параллельного переноса. Покажите, что

$$K_{\dot\gamma(t)}(E_i(t)) = \lambda_i E_i(t),\ i = \overline{1,n},$$

где λ_i не зависит от t.

(г) Пусть $Y(t) = \sum_i x_i(t) E_i(t)$ – поле Якоби вдоль γ. Покажите, что

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

(д) Покажите, что сопряжённые с p точки имеют вид $\gamma(\frac{\pi k}{\sqrt{\lambda_i}})$, где λ_i – положительное собственное значение K_v.