## Семинар 8.

**Задача 1.** (Это задача 2.2) из задания к семинару 7.) По аналогии с задачей 2.1) из задания к семинару 7 получите явные формулы для перечисления троек натуральных чисел $(a,\ b,\ c)$ - длин сторон целочисленных треугольников с углом 60 градусов и найдите первый такой треугольник.

**Задача 2.** Как устроено произвольное дифференцирование кольца многочленов от $n$ переменных $\mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$? (См. комментарии в видеофайле к семинару 8.)

**Задача 3.** (Это задача 3 из задания к семинару 7. Она фактически рассмотрена на семинаре 8.) Пусть $C$ – невырожденная коника, и $O$ – произвольная точка вне $C$. Проведем три произвольные прямые $l$, $m$, $n$ через точку $O$, пересекающие конику $C$ в точках $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$. Тогда по теореме Дезарга для перспективных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ точки $S = (BC) \cap (B_1C_1)$, $S' = (AB) \cap (A_1B_1)$, $S'' = (AC) \cap (A_1C_1)$ лежат на одной прямой (оси Дезарга), которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$. Докажите, что прямая $\mathbf{p}_O$ совпадает с прямой Паскаля для 6-угольника $ABCA_1B_1C_1$.
*Замечание.* Эта прямая не зависит от выбора прямых $l$, $m$, $n$ через точку $O$. (Это следует из задачи 4 к семинару 7, разобранной на семинаре 8.) Она называется **полярой точки $O$ относительно коники $C$**.

**Задача 4.** (Это задача 5 из задания к семинару 7.) 1) В условиях предыдущей задачи докажите, что поляра $\mathbf{p}_O$ пересекает конику $C$ в двух различных точках $A$ и $B$. (Пусть для простоты основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$.)
2) Пусть $\mathbb{T}_AC$ и $\mathbb{T}_BC$ - касательные к конике $C$ в точках $A$ и $B$ сответственно. Докажите, что $O$ - точка пересечения прямых $\mathbb{T}_AC$ и $\mathbb{T}_BC$.

**Задача 5.** (Это задача 6 из задания к семинару 7.) Докажите, что если точка $X$ лежит на поляре $\mathbf{p}_Y$ точки $Y$ относительно коники $C$, то и, наоборот, точка $Y$ лежит на поляре $\mathbf{p}_X$ точки $X$ относительно $C$.