

ЗАДАЧИ 7 СЕТ, 30.11.2021

На лекции мы обсуждали закон больших чисел (ЗБЧ), классический и для цепей Маркова. А вот *усиленный* классический ЗБЧ:

Теорема. Пусть случайные величины η_0, η_1, \dots независимы и имеют конечный второй момент, т.е. $\mathbb{E}\eta_j^2 < \infty$ (в частности, отсюда следует $\mathbb{E}|\eta_j| < \infty$ – докажите!), и их дисперсии $\text{Var} \eta_j$ ограничены равномерно по j . Тогда случайная величина $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j$ удовлетворяет

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega) - \mathbb{E}S_n}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty) = 1.$$

Такая сходимость называется *сходимостью почти наверное (или почти всюду)*. Обозначается $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \rightarrow 0$ п.н. (либо п.в.; на английском – a.s. (almost surely)). Из сходимости почти наверное *следует* сходимость по вероятности, но обратное неверно. Вид сходимости – единственное различие между усиленным и обычным ЗБЧ. Доказательство усиленного ЗБЧ несколько сложнее, чем обычного, см. например учебник Ширяева.

Для марковских цепей также верен усиленный ЗБЧ. Его формулировка совпадает с формулировкой обычного ЗБЧ, данной на лекции, но вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное. Далее под ЗБЧ мы понимаем обычный ЗБЧ. Однако, в некоторых из задач нужно использовать усиленный ЗБЧ. В этом случае в указаниях к задаче дан соответствующий комментарий.

1. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$, такой что она не эргодична, но для нее выполнен ЗБЧ.

Указание: возможно, здесь удобнее искать пример, для которого выполнен усиленный ЗБЧ (конечно, обычный при этом тоже будет выполняться).

2. Привести пример МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$, такой что для нее не выполнен ЗБЧ. То есть, существует функция f , для которой предел последовательности $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(\xi_k)$ по вероятности либо не существует, либо зависит от начального условия.
3. Компания "Рога и Копыта" плохо пережила карантин и стала выплачивать дивиденды своим акционерам нерегулярно. И если в данном месяце она не выплатила дивиденды, то в следующем месяце она их не выплатит с вероятностью 0.6. Но если дивиденды были выплачены, то в следующем месяце они будут выплачены с вероятностью 0.9. При условии, что компания не оправится от карантина в течение достаточно длительного времени, какой процент от максимально возможного числа дивидендных выплат за этот период стоит ожидать получить ее акционерам?
4. * Докажите пункт д) задачи 2 из сета 6.

Указание: пусть $\nu_1^n = \#\{0 \leq i \leq n-1 : \xi_i = 1\}$. Применяя усиленный ЗБЧ для марковских цепей, найдите предел последовательности $\nu_1^{\tau_n} / \tau_n$. А чему равно $\nu_1^{\tau_n}$?