Семинар 11

Обозначения (действуют до 20 марта 2022): $\mathbb{F}_q$ – поле из q элементов, p – простое число (иногда неприводимый многочлен), $K[x_1, x_2, \dots x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных над кольцом K.

1. Найти нормированный многочлен с комплексными коэффициентами,имеющий корни:
а) $1, 2, -3, -4$; б)$1+i, 1+i, 2, 2$.

2. Определить кратность корня $x = 2$ многочлена $X^5 + 2X^4 - 2X^2 - 3X - 1 \in \mathbb{F}_7[X]$.

3. Решить сравнение $X^{100} + 10X^{51} + 10X^{10} + 100X = 0(\mathrm{mod} 11)$.

4. Даны два многочлена из кольца $\mathbb{F}_p[X]$, имеющие степень не выше чем $p-1$. Доказать, что если они равны как функции, то они равны и как многочлены.

5. Найти сумму квадратов и произведение всех корней многочлена $X^n + aX^{n-1} + b$, $n > 2$.

6. Объясните, как не зная корней многочлена с рациональными коэффициентами, построить многочлен с теми же, но уже однократными корнями.

7. Постройте минимальный многочлен с целыми коэффициентами для числа $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

8. Доказать, что $\sin 2\pi/5$ и $\sin \pi/5$ алгебраические числа.

9. Докажите, что множество всех чисел, алгебраических над данным полем, является полем.

10. Докажите, что поле из задачи 9 алгебраически замкнуто.

11. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби $(4^{1/3} + 3 \times 2^{1/3} - 1)^{-1}$.