

РАЗБОР ЗАДАЧ, 7.12.2021

Задача 7.3 Процесс описывается марковской цепью ξ_0, ξ_1, \dots с двумя состояниями: компания не выплатила дивиденды (состояние 1) и компания выплатила дивиденды (состояние 2). За n месяцев доля месяцев, в которые были произведены выплаты, равна $x_n := \frac{\#\{1 \leq i \leq n: \xi_i = 2\}}{n}$. Нас интересует предел этой величины при $n \rightarrow \infty$ (задача сформулирована не математически, поэтому в каком смысле понимать предел — не первое дело, в каком он будет, в таком и будем понимать).

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица перемешивает, поэтому, по эргодической теореме, цепь эргодична, а значит работает закон больших чисел. Следовательно, $x_n \rightarrow \pi_2$ по вероятности, где $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ — единственное стационарное состояние цепи. Простое вычисление показывает, что $\pi_2 = 0,8$. Итого, ответ — 80%. Вообще-то, здесь имеет место также и усиленный закон больших чисел (см. листок 7), так что сходимости выполнены не только по вероятности, но и почти наверное. Представьте себя акционером: со сходимостью почти наверное вы будете себя чувствовать увереннее.