Листок семинаров 11.

1. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — непустые множества. Доказать, что $A \times B$ открыто в точности тогда, когда A и B открыты, а замкнуто в точности тогда, когда A и B замкнуты.

2. Пусть A — замкнутое множество на плоскости. Верно ли, что его проекция на прямую замкнута?

3. Пусть A — открытое множество на плоскости. Верно ли, что его проекция на прямую открыта?

4. Пусть A и B — непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Их суммой Минковского называется множество $A + B$ всех сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. (i) Верно ли, что сумма Минковского компактов компактна? (ii) Верно ли, что сумма Минковского замкнутых множеств замкнута? (iii) Верно ли, что сумма Минковского открытых множеств открыта?

5. Пусть последовательность точек a_j в $\mathbb{R}^n$ сходится к нулю. Доказать, что найдется такое непрерывное отображение $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, что $a_j = \varphi(1/j)$.

6. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что для всякого непрерывного отображения $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ композиция $f(\varphi)$ непрерывна. Верно ли, что функция f непрерывна?

7. Доказать, что стандартная норма на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица.

8. Доказать, что всякая норма на $\mathbb{R}^n$ с обычной нормой удовлетворяет условию Липшица.

9. Пусть A — непустое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. (i) Доказать, что для всякой точки x есть ближайшая точка из A, т.е. такая точка $b(x) \in A$, что выполнено равенство $|x - b(x)| = \inf_{a \in A} |x - a|$. (ii) Доказать, что функция $x \mapsto \inf_{a \in A} |x - a|$ удовлетворяет условию Липшица.

10. (i) Пусть функция f на плоскости имеет частные производные $\partial_x f$ и $\partial_y f$, причем $|\partial_x f| \leq 1$, $|\partial_y f| \leq 1$. Доказать, что функция f непрерывна. (ii) Пусть функция f на плоскости имеет все частные производные $\partial_x^n \partial_y^k f$. Верно ли, что она непрерывна?