

Графы на поверхностях
Задача 3

Решения можно присылать по почте Амбург Наталье namburg@hse.ru.

Рассмотрим пространство комплексных матриц $M_N(\mathbb{C})$ размера $N \times N$ как $2N^2$ -мерное действительное пространство, $Z \in M_N(\mathbb{C})$. Для $F(Z)$ функции от элементов матрицы Z определим среднее для Гауссовой меры

$$\langle F(Z) \rangle = \frac{1}{\pi^{N^2}} \int_{M_N(\mathbb{C})} F(Z) \exp(-\text{Tr}(ZZ^+)) \prod_{1 \leq i, j \leq N} d\text{Re}(Z_{ij}) d\text{Im}(Z_{ij})$$

Все средние для функций в этой задаче это многочлены от размера матрицы, а коэффициенты многочленов связаны с суммированием по *детским рисункам Гротендика*. Выберите одно среднее из списка. Посчитайте его для нужного количества разных N явно, не используя связь с рисунками, и найдите коэффициенты многочлена. Нарисуйте соответствующие рисунки с указанием порядков групп автоморфизмов.

Задачи на 3 балла:

- $\langle \text{Tr}(Z^2)(\text{Tr}(Z))^2 \text{Tr}((Z^+)^4) \rangle$
- $\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}((Z^+)^2) (\text{Tr}(Z^+))^2 \rangle$

Задачи на 4 балла:

- $\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}((Z^+)^3) \text{Tr}(Z^+) \rangle$
- $\langle \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}(Z) \text{Tr}((Z^+)^4) \rangle$