

## Семинар 10.

**Задача 1.** Даны три различные точки  $A, B, C$  на невырожденной конике  $X$ . Рассмотрим треугольник  $A'B'C'$ , образованный касательными в точках  $A, B, C$ . Пусть  $\{A, A_1\} = (AA') \cap X$ ,  $\{B, B_1\} = (BB') \cap X$ ,  $\{C, C_1\} = (CC') \cap X$ . Итак, по тройке точек  $A, B, C$  построена новая тройка точек  $A_1, B_1, C_1$  на  $X$ . Покажите, что соответствие  $\{A, B, C\} \rightsquigarrow \{A_1, B_1, C_1\}$  взаимно.

**Задача 2.** В условиях предыдущей задачи докажите, что вершины треугольников, образованных касательными к  $X$  в точках  $A, B, C$  и  $A_1, B_1, C_1$  соответственно, лежат на конике.

**Задача 3.** Пусть  $\mathcal{C}$  - невырожденная коника в  $\mathbb{P}^2$ , и  $x$  - точка на  $\mathcal{C}$ . С помощью линейки постройте касательную  $T_x\mathcal{C}$  к конике  $\mathcal{C}$  в точке  $x$ .

**Задача 4.** Дана невырожденная коника  $\mathcal{C}$ . Инволюцией на  $\mathcal{C}$  назовем такое биективное отображение  $f : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$  такое, что  $f \neq \text{id}$ ,  $f^2 = \text{id}$  и  $f$  сохраняет двойное отношение четверок точек на конике  $\mathcal{C}$ . Возьмем точку  $S \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}$  и рассмотрим отображение  $f : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C} : X \mapsto (SX) \cap \mathcal{C} \setminus \{X\}$ .

(1) Докажите, что  $f$  есть инволюция на  $\mathcal{C}$ .

(2) Докажите, что любая инволюция на  $\mathcal{C}$  получается вышеуказанным способом.