Листок 4

ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ, ТЕОРЕМА О СФЕРЕ

1. На лекции мы рассмотрели такую лемму: пусть в открытом шаре $B(0,R) \subset T_pM$ отображение $\exp_p$ является локальным диффеоморфизмом. Предположим, что петля γ с вершиной в p стягивается в точку p в шаре $B = \exp_p(B(0,R))$. Тогда γ не может быть геодезическим двуугольником. Дайте другое доказательство теоремы Картана-Адамара, используя эту лемму.

2. Пусть $\mathcal{A}$ – множество метрических компактов X с метрикой Громова-Хаусдорфа. Пусть $diam X \leqslant D$ для некоторого фиксированного D и пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) :\ \forall X \in \mathcal{A}$ существует $\varepsilon-$сеть из не более чем $N(\varepsilon)$ элементов. Докажите, что $\mathcal{A}$ прекомпактно.

3. Используя следствия из теоремы сравнения Бишопа-Громова а также задачу 2, докажите теорему (пре)компактности Громова.

4. Определим *оператор кривизны* по формуле

$$\mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle_g$$

Говорят, что риманово многообразие размерности $\geqslant 4$ имеет положительную изотропную кривизну, если для любых четырёх ортонормированных векторов $e_1, e_2, e_3, e_4 \in T_pM$ выполняется неравенство

$$\mathcal{R}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) > 0.$$

Микаллеф и Мур доказали следующее обобщение теоремы о четверть зажатой сфере: *всякое компактное односвязное риманово многообразие размерности $\geqslant 4$ положительной изотропной кривизны гомеоморфно сфере*. Выведите из теоремы Микаллефа-Мура теорему о четверть зажатой сфере.

Указание: Используйте неравенство Берже: если кривизна риманова многообразия ограничена снизу константой $\delta K > 0$ (т.е. $K_\sigma > \delta K\ \forall \sigma$), то $|R(e_i, e_j)e_k, e_l| < \frac{2}{3}(1-\delta)K$, где векторы e_i, e_j, e_k, e_l ортонормированны.