

Семинар 12 (подготовка к контрольной 25 декабря)

0. Является ли поле наименьшее кольцо, содержащее поле рациональных чисел и число e ?
1. Решить кубическое уравнение $X^3 + 3X - 10 = 0$?
2. Рассмотрим все кубические многочлены вида $X^3 + PX + Q$, $P, Q \in \mathbb{R}$, $|P| < 1$, $|Q| < 1$. Какова вероятность того, что случайно выбранный из этого множества многочлен имеет три вещественных корня?
3. Найдите такое число γ , что $\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
4. Докажите, что каждое число из простого расширения поля рациональных чисел является алгебраическим числом.
5. Найдите многочлен с рациональными коэффициентами, имеющий своим корнем число $\alpha + \beta$, если минимальные многочлены α , β суть $P_\alpha = X^3 + X + 1$, $P_\beta = X^2 - 5$.
6. Какие из перечисленных многочленов неприводимы в кольце $\mathbb{Z}[X]$: $X^3 - X + 1$, $X^3 + 2X + 1$, $X^5 - X + 1$, $5X^3 + X^2 - 10X - 2$?
7. Рассмотрим поле F конечной характеристики $p > 0$. Доказать, что если $\alpha \in F$ является корнем p -ой степени из единицы, то $\alpha = 1$.
8. Найти степень расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5})(\sqrt{7})(\sqrt{11})$.