ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ
Дополнительные главы римановой геомтрии

Каждая из задач из нижеприведенного списка оценивается максимум в 20 баллов. Таким образом, для получения оценки 100 баллов достаточно правильно решить **любые 5 задач** *из этого списка. Решения следует направлять на электронный адрес: wowa-medved@mail.ru* **до 23 декабря 23:59. После этого задачи не принимаются!**

1. Пусть (M, g) – нечетномерное замкнутое риманово многообразие положительной кривизны. Докажите, что оно ориентируемо.

Указание: воспользуйтесь идеей доказательства теоремы Синга.

2. Докажите следующее обобщение теоремы Бонне-Майерса. Пусть (M, g) – полное риманово многообразие такое, что существуют константы $a > 0$ и $c \geqslant 0$ такие, что для любой геодезической γ, параметризованной натурально верно, что

$$Ric(\dot{\gamma}(t)) \geqslant a + \frac{df(t)}{dt} \text{ вдоль } \gamma,$$

где f – дифференируемая функция от t, для которой $|f(t)| \leqslant c$ вдоль γ. Докажите, что M компактно. Найдите, оценку на диаметр (M, g). Заметьте, что теорема Бонне-Майерса соответсвует случаю $f = 0, c = 0$.

3. Риманово многообразие (M, g) называется локально симметрическим, если его тензор кривизны параллелен, т.е. $\nabla R = 0$.

(а) Покажите, что если $\gamma\colon [0, 1] \to (M, g)$ – геодезическая в локально симметрическом многообразии и поля X, Y, Z параллельны вдоль γ, то $R(X, Y)Z$ – параллельное вдоль γ поле.

(б) Пусть $\gamma\colon [0, \infty) \to (M, g)$ – геодезическая в локально симметрическом многообразии и $v = \dot{\gamma}(0)$ – её скорость в точке $p = \gamma(0)$. Определим линейное преобразование $K_v\colon T_pM \to T_pM$, полагая

$$K_v(X) = R(v, X), v \; X \in T_pM.$$

Докажите, что K_v – самосопряженное преобразование.

(в) Выберите диагонализующий K_v ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в T_pM, т.е.

$$K_v(e_i) = \lambda_i e_i, \; i = \overline{1, n}.$$

Продолжите этот базис до полей $\{E_i\}_{i=1}^n$ вдоль геодезической γ при помощи параллельного переноса. Покажите, что

$$K_{\dot{\gamma}(t)}(E_i(t)) = \lambda_i E_i(t), \; i = \overline{1, n},$$

где λ_i не зависит от t.

4 В условиях предыдущей задачи ответьте на следующие вопросы

(а) Пусть $Y(t) = \sum_i x_i(t)E_i(t)$ – поле Якоби вдоль γ. Покажите, что

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0, \; i = \overline{1, n}.$$

(б) Покажите, что сопряжённые с p точки имеют вид $\gamma(\frac{\pi k}{\sqrt{\lambda_i}})$, где λ_i – положительное собственное значение K_v.

5. Пусть $\mathcal{A}$ – множество метрических компактов X с метрикой Громова-Хаусдорфа. Пусть $diam X \leqslant D$ для некоторого фиксированного D и пусть $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \; \forall X \in \mathcal{A}$ существует $\varepsilon-$сеть из не более чем $N(\varepsilon)$ элементов. Докажите, что $\mathcal{A}$ прекомпактно.

6. Используя следствия из теоремы сравнения Бишопа-Громова а также задачу 5, докажите теорему (пре)компактности Громова.

7. Определим *оператор кривизны* по формуле

$$\mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle_g$$

Говорят, что риманово многообразие размерности $\geqslant 4$ имеет положительную изотропную кривизну, если для любых четырёх ортонормированных векторов $e_1, e_2, e_3, e_4 \in T_pM$ выполняется неравенство

$$\mathcal{R}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) > 0.$$

Микаллеф и Мур доказали следующее обобщение теоремы о четверть зажатой сфере: *всякое компактное односвязное риманово многообразие размерности* $\geqslant 4$ *положительной изотропной кривизны гомеоморфно сфере.* Выведите из теоремы Микаллефа-Мура теорему о четверть зажатой сфере.

Указание: Используйте неравенство Берже: если кривизна риманова многообразия ограничена снизу константой $\delta K > 0$ (т.е. $K_\sigma > \delta K\ \forall \sigma$), то $|R(e_i, e_j)e_k, e_l| < \frac{2}{3}(1-\delta)K$, где векторы e_i, e_j, e_k, e_l ортонормированны.