

Вопросы к экзамену по курсу «Дифференциальные уравнения», 2020/21 уч. г.

Билет экзамена будет состоять из двух вопросов из списка. На подготовку даётся 45 минут, но уже через 30 минут вы должны быть готовы ответить минимум на один вопрос билета. После обсуждения этих двух вопросов экзаменатор по своему усмотрению задаёт либо третий теоретический вопрос, либо задачу, аналогичную задачам семинаров или ДЗ.

Если в ответе на вопрос вы пользуетесь утверждением или определением из первой части курса, вы должны уметь его сформулировать.

1. Сведение задачи Коши с параметром к задаче с параметром только в начальном условии. Теорема о дифференцировании решений задачи Коши по параметру.
2. Теорема о выпрямлении векторного поля.
3. Симметрии уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ переводят интегральные кривые в интегральные кривые. Однопараметрические группы диффеоморфизмов и их генераторы.
4. Однопараметрическая группа симметрий ДУ. Понижение размерности ДУ с помощью однопараметрической группы симметрий.
5. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов фазового пространства — симметрий векторного поля v . Эквивалентность трёх условий: коммутирование потоков поля v и генератора u группы симметрий, сохранение поля v симметриями, равенство нулю коммутатора u и v .
6. Коммутатор векторных полей: определение с помощью дифференцирования функций вдоль векторного поля, выражение в координатах, свойства.
7. Линейные уравнения: однородные и неоднородные. Пространства их (непродолжимых) решений. Линейная независимость решений однородного уравнения в одной точке и в целом. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица решений, связь различных ФМР. Метод вариации постоянных для решения неоднородных линейных систем.
8. Определитель Вронского, его свойства (линейная зависимость функций и равенство нулю определителя Вронского). Формула Лиувилля—Остроградского.
9. Экспонента матрицы: определение, существование, дифференциальное уравнение. Использование экспоненты для решения линейных систем с постоянными коэффициентами.
10. Свойства экспоненты матрицы: экспонента сопряжённых матриц, суммы коммутирующих матриц, блочно-диагональной матрицы. Способы вычисления экспоненты: с помощью жордановой нормальной формы и с помощью интерполяционного многочлена.
11. Линейное однородное уравнение высокого порядка, его фундаментальная система решений.
12. Неоднородные линейные уравнения и системы с квазимногочленом в правой части: поиск частного решения.
13. Линеаризация особой точки векторного поля. Преобразование матрицы линеаризации при замене локальных координат. Гиперболические особые точки. Связь поведения системы в окрестности гиперболической точки и её линеаризации: теоремы Гробмана—Хартмана и Адамара—Перрона (без доказательства).
14. Устойчивость постоянных решений: по Ляпунову и асимптотическая. Примеры, различающие эти типы устойчивости. Теоремы Ляпунова и Четаева.
15. Линеаризация векторного поля в окрестности неподвижной точки. Независимость от системы координат. Условия устойчивости/неустойчивости по линейному приближению.
16. Изменение (сохранение) объёма операторами Коши ДУ. Исследование устойчивости периодического решения ДУ с периодической правой частью с помощью уравнения на якобиан.