Лекция 3.

$\# \Omega < \infty$

$(\Omega, \mathbb{P})$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $A_\xi = \{a_1, \dots, a_k\}$ $\xi(\Omega) = A_\xi$

$P_\xi = (p_{a_1}, \dots, p_{a_k})$, $p_{a_i} = \mathbb{P}(\xi = a_i) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = a_i\})$

– распределение ξ.

Пример n раз бросаем монетку $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = 0$ или $1\}$. (решка 0, орёл 1)

броски независимые

орёл p
решка $q = 1-p$

η – сл. величина $\eta(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ – число орлов.

$P_\eta - ?$ $A_\eta = \{0, 1, \dots, n\}$. $P_\eta = (\mathbb{P}(\eta=0), \mathbb{P}(\eta=1), \dots, \mathbb{P}(\eta=n))$

$$\boxed{\mathbb{P}(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} q^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i} = p^{\eta(\omega)} q^{n-\eta(\omega)}}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\eta = k}_{\{\omega : \eta(\omega) = k\}}) = \sum_{\omega : \eta(\omega) = k} \underbrace{\mathbb{P}(\omega)}_{p^k q^{n-k}} = \boxed{C_n^k p^k q^{n-k}}$$

$P_\eta = (q^n, npq^{n-1}, C_n^2 p^2 q^{n-2}, \dots, p^n)$ – **биномиальное распределение**

$\eta \sim B(n, p)$ $q = 1-p$

Основные характеристики случайных величин

$\xi(\Omega) = A_\xi$

Опр Математическим ожиданием случайной величины ξ наз-ся $\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{a_j \in A_\xi} a_j \mathbb{P}(\xi = a_j) = \sum_{a_j \in A_\xi} a_j p_{a_j}$

Если $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\#\Omega}$, то $\mathbb{E}\xi = \frac{\sum \xi(\omega)}{\#\Omega}$ – среднее арифм. значений ξ.

$\mathbb{P}(\omega_1)\ \xi(\omega_1)$ $\mathbb{E}\xi$ $\xi(\omega_2)\ \mathbb{P}(\omega_2)$

Св-ва:
- $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$, $\forall \xi, \eta$ – сл. вел., $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}\,const = const$
- $\xi \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\xi \geq 0$.

$\mathbb{E}\xi^p$ — p-ый момент.

<u>Опр</u> Дисперсией случ. вел. ξ наз-ся

$$\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$ — $\sqrt{}$ среднее квадратичное отклонение

Если $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}\xi^2$ — второй момент ξ

$\tilde{\xi} = \xi - \mathbb{E}\xi \Rightarrow \mathbb{E}\tilde{\xi} = 0.$

<u>Пример</u> $\xi_1 = \begin{matrix} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{matrix}$ $\quad \mathbb{E}\xi_1 = 0 \quad \mathrm{Var}\,\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1.$

$\xi_2 = \begin{matrix} 100, & \frac{1}{2} \\ -100, & \frac{1}{2} \end{matrix}$, $\mathbb{E}\xi_2 = 0$, $\mathrm{Var}\,\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 = 100^2 \cdot \frac{1}{2} + (-100)^2 \cdot \frac{1}{2} = 10000.$

$\mathbb{P}(\xi_2 = 100) = \frac{1}{2}.$

<u>Утв</u> $\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$. — удобна для счета.

<u>Док-во</u> $\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\,\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\underbrace{\mathbb{E}(\xi\,\mathbb{E}\xi)}_{=(\mathbb{E}\xi)^2} + \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}\xi)^2}_{=(\mathbb{E}\xi)^2}$

$-2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2$

<u>Св-ва дисперсии:</u>

- $\mathrm{Var}(\xi + \eta) \cancel{=} \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$
- $\mathrm{Var}(\mathrm{const}\,\xi) = \mathrm{const}^2\,\mathrm{Var}\,\xi$
- $\mathrm{Var}\,\mathrm{const} = 0$
- $\mathrm{Var}\,\xi \geq 0 \quad \forall \xi.$
- $\mathrm{Var}\,\xi = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = \mathrm{const}) = 1.$

<u>Опр</u> Случайные величины η и ξ <u>независимы</u>, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\xi \in A, \eta \in B}) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\eta \in B).$$

$\Leftrightarrow$

$\{\omega : \xi(\omega) \in A, \eta(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B) \subset \Omega$

$\mathbb{P}(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(A))\,\mathbb{P}(\eta^{-1}(B)).$

То есть, ξ и η — независимы $\Leftrightarrow$ события $\xi^{-1}(A)$ и $\eta^{-1}(B)$ независимы $\forall A, B \subset \mathbb{R}.$

Аналогично определяется независимость в совокупности случ. величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k.$

__Пример__ Монетка, 2 раза. $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2),\ \omega_j = 0,1\}$ $\mathbb{P}(\omega)=\frac{1}{4}$ $\forall \omega \in \Omega$.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 5, & \omega_1 = 0 \\ 105, & \omega_1 = 1 \end{cases}, \quad \eta(\omega) = \begin{cases} -5, & \omega_2 = 0 \\ 10, & \omega_2 = 1 \end{cases}$$

__Упр__ ξ и η – независимы.

__Вопрос:__ ξ, η – независимы. Верно ли, что $\xi + const, \eta$ – независимы?

$A, B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\xi + const \in A, \eta \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A - const;\ \eta \in B) =$$

$$= \mathbb{P}(\xi \in A - const)\,\mathbb{P}(\eta \in B) = \mathbb{P}(\xi + const \in A)\,\mathbb{P}(\eta \in B).$$

$\boxed{\text{Да}}$

__Упр__ ξ, η – независимы. Верно ли, что $\xi + \eta, \eta$ – независимы?

$\boxed{\text{Нет}}$

__Лемма__ $\boxed{(\text{упр})}$ Пусть ξ и η – независимые случайные величины. Тогда

- $\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$
- $Var(\xi + \eta) = Var\,\xi + Var\,\eta$.

__Пример__ ξ, ξ – не независимы.

$\mathbb{E}\xi^2 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$. Равенство достигается $\Leftrightarrow$ $\underset{\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2}{\underset{\parallel}{Var\,\xi}} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = const) = 1$.

__Опр__ Ковариацией случайных величин ξ и η наз-ся

$$cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) \underset{\text{упр}}{=} \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta.$$

В частности, $cov(\xi,\xi) = Var\,\xi$.

Коэффициент корреляции: $$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{Var\,\xi}\sqrt{Var\,\eta}}.$$

Утв: 1) ξ,η — независимы $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = r_{\xi,\eta} = 0$.

$\boxed{\not\Leftarrow}$

2) $|r_{\xi,\eta}| \le 1$, причём $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Д-во: 1) ξ,η — незав. $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = 0$

$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$.

$\Leftarrow$ $\boxed{\text{задача}}$ $\boxed{\text{придумать } \xi,\eta, \text{ т.ч. } \mathrm{cov}(\xi,\eta)=0, \text{ но } \xi \text{ и } \eta \text{ — зависимы.}}$

2) Рассмотрим линейное пр-во H, состоящее из $\boxed{\text{центрированных}}$ случайных величин $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbb{E}f=0}$ $\quad f,g\in H$ $\quad \#\Omega<\infty$.

Тогда $\mathrm{cov}(f,g) = \mathbb{E}fg = \sum\limits_{\omega} f(\omega)g(\omega)P(\omega)$ —

— скалярное произведение на H.

Нер-во Коши–Буняковско: $|\mathrm{cov}(f,g)| \le \sqrt{\mathrm{cov}(f,f)}\sqrt{\mathrm{cov}(g,g)}$

$= \sqrt{\mathrm{Var}\, f}\sqrt{\mathrm{Var}\, g}$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{|\mathrm{cov}(f,g)|}{\sqrt{\mathrm{Var} f}\sqrt{\mathrm{Var}\, g}}}_{=\ r_{f,g}} \le 1.$

Выбираем $f = \xi - \mathbb{E}\xi$, $g = \eta - \mathbb{E}\eta$.

$\mathrm{cov}(f,g) = \mathrm{cov}(\xi,\eta)$

$\mathrm{Var}\, f = \mathrm{Var}\,\xi$, $\mathrm{Var}\, g = \mathrm{Var}\,\eta$.

$\Rightarrow \boxed{r_{\xi,\eta} = r_{f,g}}$ $\quad |r_{\xi,\eta}| \le 1$.

Остается д-ть, что $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \boxed{\xi = a\eta + b}$

$|r_{f,g}| = 1 \overset{\text{К-Б}}{\Longleftrightarrow} f = ag \Leftrightarrow \xi - \mathbb{E}\xi = a(\eta - \mathbb{E}\eta)$

$\xi = a\eta + \underbrace{\mathbb{E}\xi - a\mathbb{E}\eta}_{b}$

<u>Лекция 4, 24.09.2021</u>

X, Y, т.ч.

X, Y — не независимы, но $cov(X,Y)=0$

$\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(3)=\frac{1}{3}$

$X(1)=1$, $X(2)=0$, $X(3)=-1$

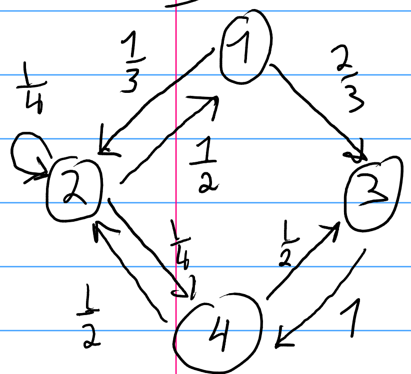
$Y(1)=0$, $Y(2)=1$, $Y(3)=0$.

$$cov(X,Y) = \underbrace{\mathbb{E}XY}_{0} - \underbrace{\mathbb{E}X}_{0}\,\mathbb{E}Y = 0$$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(2) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$k=1$



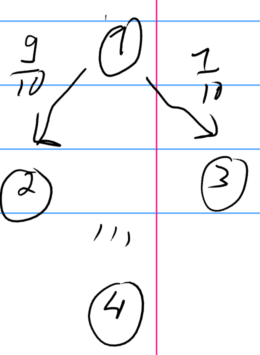
$\mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2, \xi_0=2) = \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2, \xi_0=4)$
$= \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2) = \frac{1}{4}$

$X=\{1,2,3,4\}$.

$p_{12} = \frac{1}{3}$

$p_{32} = 0$.

<u>$k=2$</u>



<u>Цепи Маркова</u>

Ингредиенты марковской цепи (МЦ):

- X — мн-во, конечное либо счетное, "мн-во состояний"

$$X = \begin{cases} \{1,2,\dots\} \\ \{1,2,\dots,L\} \end{cases}$$

- числа $p_k(i,j)$, $i,j \in X$, $k \geq 1$

— "переходная вер-ть из состояния i в состояние j", удовлетворяющие

$p(i,j) \geq 0$ и $\sum_{j\in X} p(i,j) = 1$,

на k-ом шаге.

<u>Опр</u> Если $p_k(i,j)$ не зависит от k, $\forall i,j$, то марковская цепь наз-ся <u>однородной</u>

В случае, когда цепь однородная, будем обозначать

$$p_{ij} := p_k(i,j)$$

• $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вер. пр-во

$\Omega = \{\omega = (i_0, i_1, i_2, \dots)$, где $i_k \in X\}$; $\xi_k(\omega) = i_k$

Для тех, у кого не было ТВ: можно думать, что Ω — не более, чем счётное мн-во, тогда сигма-алг. $\mathcal{F}$ — мн-во всех подмн-в.

Этого будет достаточно для МЦ конечной длины

• случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \to X$.

ξ_k — положение "лягушки" в момент времени k (другими словами, после k-го прыжка)

Опр 1 Посл-ть случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ образует МЦ с переходными вероятностями $p_k(i,j)$, если $\forall\, k \geq 1$ выполнено:

1) $\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_{k-2} = i_{k-2}, \dots, \xi_0 = i_0)$

$= \mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1})$, $\forall\, i_0, \dots, i_k \in X$,

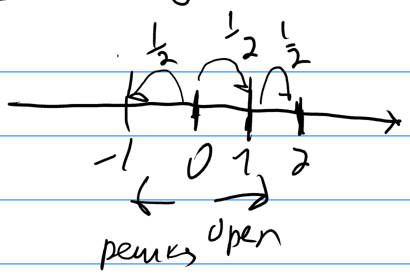
т.ч. $\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_{k-2} = i_{k-2}, \dots, \xi_0 = i_0) \neq 0$.

2) $\mathbb{P}(\xi_k = j \mid \xi_{k-1} = i) = p_k(i,j)$

Прошлое: $i_0 \dots i_{k-2}$ Настоящее: $i_{k-1} \to i_k$ Буд.

$\boxed{\text{Б зависит от Н, но не зав. от П.}}$

Пример: Случайное блуждание:



ξ_k — положение в момент k

ξ_k — МЦ.

$\mathbb{P}(\xi_0=0)=1$.

$$\mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=1, \xi_0=0) = \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=1)=\frac{1}{2}.$$

Обозначим $p_j^{(0)} := \mathbb{P}(\xi_0=j)$, $j\in X$.

$p^{(0)} = \left(p_j^{(0)}\right)_{j\in X}$ — наз-ся начальным распределением (распр-ие случ. вел. ξ_0).

Пример: $p^{(0)} = \left(\overset{\mathbb{P}(\xi_0=1)}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{3}}}, \overset{\mathbb{P}(\xi_0=2)}{\overset{\shortparallel}{\frac{2}{3}}}, 0, 0\right)$. пер. вер-ти как на картинке

$$\mathbb{P}(\xi_0=1, \xi_1=2, \xi_2=2, \xi_3=4) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(\xi_3=4 \mid \xi_2=2, \xi_1=2, \xi_0=1)}_{= \mathbb{P}(\xi_3=4 \mid \xi_2=2)} \mathbb{P}(\xi_2=2, \xi_1=2, \xi_0=1)$$

$$= P(2,4)\, \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2, \xi_0=1)\, \mathbb{P}(\xi_1=2, \xi_0=1) = \text{"} =$$

$$= P(2,4)\, P(2,2)\, P(1,2)\, \mathbb{P}(\xi_0=1) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{144}.$$

Аналогично можно вычислить вер-ть произвольного пути:

Опр 2 Посл-ть $\xi_0, \xi_1, \dots$ образует МЦ с переходными вер-ми $P_k[i,j]$, если

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_k = i_k) = p^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot P_k(i_{k-1}, i_k)$$

$\forall\, i_0, \dots, i_k \in X$, $\forall k$, где $p^{(0)}_{i_0} = \mathbb{P}(\xi_0 = i_0)$.

Утв 3 Опр 1 и 2 — эквивалентны

Док-во: $1 \Rightarrow 2$ — упражнение

$2 \Rightarrow 1$: $\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0)}{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0)} =$$

$$= \frac{\cancel{p^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot} P_k(i_{k-1}, i_k)}{\cancel{p^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \ldots P_{k-1}(i_{k-1}, i_k)}} = P_k(i_{k-1}, i_k).$$

$$\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}) = \frac{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_k = i_k)}{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1})} \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i_0, \dots, i_{k-2} \in X} \{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_k = i_k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i_0, \dots, i_{k-2}} \{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0, \dots, i_{k-2}} \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_k = i_k)}{\sum_{i_0, \dots, i_{k-2}} \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1})} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0, \ldots, i_{k-2}} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\ldots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_k(i_{k-1},i_k)}{\sum\limits_{i_0,\ldots,i_{k-2}} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\cdots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})} = p_k(i_{k-1},i_k).$$

ч.т.д.

<u>Замечание 4</u> Если ф-ла из <u>Опр 2</u> верна для некоторого k, то она верна для $\forall\ k' < k$.

<u>Д-во:</u> по индукции: $k' = k-1$

$$P(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{k-1} = i_{k-1}) = \sum_{i_k \in X} P(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_k = i_k)$$

$$= \sum_{i_k} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\ldots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_k(i_{k-1},i_k)$$

$$\sum_{i_k \in X} p_k(i_{k-1},i_k) = 1.$$

$$= p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\cdots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1}).$$ ч.т.д.

А только МЦ с заданными $p_k(i,j)$ сущ-ет??

<u>Построение МЦ для случая конечного времени</u> $k \le T$.

~~Даны~~

$p_k(i,j)$, $i,j \in X$

$p^{(0)}$ – фикс. какое-нибудь.

$\boxed{\text{Нужно построить } \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_T}$

Пусть • $\Omega = \{ \omega = (i_0, i_1, \dots, i_T)$, где $i_k \in X \}$, $\xi_k(\omega) = i_k$.

• $\mathbb{P}(\omega) = p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) \dots p_T(i_{T-1}, i_T)$.

Тогда $\xi_0, \dots, \xi_T$ – м.ц. действительно,

$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_T = i_T) = \mathbb{P}(\omega = (i_0, \dots, i_T)) =$

$\Rightarrow$ $\xi_0, \dots, \xi_T$ – МЦ по Опр 2 + замечание.

Нужно проверить, что $p^{(0)}_i = \mathbb{P}(\xi_0 = i)$.

$\mathbb{P}(\xi_0 = i) = \mathbb{P}(\omega = (i_0, \dots, i_T) : i_0 = i) =$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_T \in X} p^{(0)}_i p_1(i, i_1) p_2(i_1, i_2) \dots p_T(i_{T-1}, i_T)$$

$\sum_{i_T} p_T(i_{T-1}, i_T) = 1$

$= p^{(0)}_i$.

$\sum_{i_{T-1}} p_{T-1}(i_{T-2}, i_{T-1}) = 1$.

Нужно еще проверить, что $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.

так

действительно,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i_0, \dots, i_T \in X} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) \dots p_T(i_0, i_T) = \sum_{i_0} p^{(0)}_{i_0} =$$

$= 1$

Лекция 8.10 Марковская цепь за n шагов

Лемма 9 Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — однородная МЦ с матрицей переходных вероятностей (МПВ) Π. Тогда $\xi_0, \xi_n, \xi_{2n}, \xi_{3n}, \dots$ — МЦ с МПВ Π^n.

Док-во: Проверим ОПР. 2:

Утв $A_1, A_2, \dots$ — квадратные матрицы одинакового размера. Тогда

$$(A_1 A_2 \dots A_n)_{ij} = \sum_{l_1, \dots, l_{n-1}} a^1_{i l_1} a^2_{l_1 l_2} a^3_{l_2 l_3} \dots a^n_{l_{n-1} j}$$

$A_i = (a^i_{km})$ | МЦ - однородная, то $P_{ij} := P_k(i,j)$, $i,j \in X$

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_n = i_n, \xi_{2n} = i_{2n}, \dots, \xi_{kn} = i_{kn}) =$$

$\forall i_0, \dots, i_{kn} \in X$

$$= \sum_{\substack{[i_1, \dots, i_{n-1} \\ [i_{n+1}, \dots, i_{2n-1}, \\ \dots \\ i_{(k-1)n+1}, \dots, i_{kn-1}}} \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_n = i_n, \xi_{n+1} = i_{n+1}, \dots \xi_{kn} = i_{kn}) =$$

$$= \sum_{-//-} p^{(0)}_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \cdot p_{i_n i_{n+1}} p_{i_{n+1} i_{n+2}} \dots p_{i_{2n-1} i_{2n}} \dots$$

$$= p^{(0)}_{i_0} (\Pi^n)_{i_0 i_n} (\Pi^n)_{i_n i_{2n}} \dots (\Pi^n)_{i_{(k-1)n} i_{kn}} \text{ ч.т.д.}$$

$\mathbb{P}(\xi_1 = i \mid \xi_0 = j) = {}^{\xi}p_{ji}$

Следствие 10 $\mathbb{P}(\xi_n = i \mid \xi_0 = j) = (\Pi^n)_{ji}$.

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}(\xi_{kn} = i \mid \xi_{(k-1)n} = j)$$

Следствие 11 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — од. тор. МЦ.

$$\mathbb{P}(\xi_n = i) = (p^{(0)}\Pi^n)_i$$

$(\eta_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ — М.Ц., $j \in X$, т.ч.

ее МПВ совпадает с Π, то ${}^{\eta^j}p_j^{(0)} = 1$,

${}^{\eta^j}p_i^{(0)} = 0$ при $i \neq j$.

$\boxed{\eta_k^1}$ $\quad (1)\ p_1^{(0)} \quad (2)\ p_2^{(0)} \quad \boxed{\eta_k^2} \quad (3)\ p_3^{(0)}$

$$p_i^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_n = i) \underset{\text{ФПВ}}{=} \sum_{j \in X} \underbrace{\mathbb{P}(\xi_n = i \mid \xi_0 = j)}_{\parallel \leftarrow \text{следствие } (\Pi^n)_{ji}} p_j^{(0)}$$

time=0 $\quad (j) \to (i) \quad$ time=n

$${}^{\eta^j}p_i^{(n)} = \mathbb{P}(\eta_n^j = i) \qquad (0,0,\dots,\overset{j}{1},0,0)$$

Действительно, ${}^{\eta^j}p_i^{(n)} = ({}^{\eta^j}p^{(0)}\Pi^n)_i =$

$$= (\Pi^n)_{ji}$$

$|X|$ $\qquad \mathbb{P}(\xi_n = i) = \sum_{j \in X} {}^{\eta^j}p_i^{(n)} p_j^{(0)}.$ $\quad (i), 0 \quad \boxed{j}\ 1,$

$\boxed{p^{(n)}}$ $\Rightarrow$ достаточно изучить цепи с начальным распределением вида $p_i^{(0)} = \boxed{\delta_{ij}}$ $\forall i$ и нек-ой j

$\boxed{p^{(1)}_{ij} = p_{ij}}$ $p^{(n)}_{ij} := (\Pi^n)_{ij}$ — вероятность перехода из i в j за n шагов.

Следствие 12 (Ур-ие Колмогорова-Чепмена). Chapman

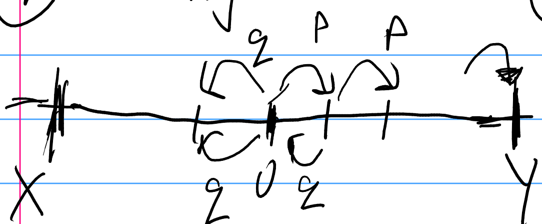
$$p^{(n+k)}_{ij} = \sum_{\alpha \in X} p^{(n)}_{i\alpha} p^{(k)}_{\alpha j}.$$

$\sum_{\alpha}$

Д-во: $\Pi^{n+k} = \Pi^n \Pi^k$. ч.т.д.

Примеры МЦ

1. Случайное блуждание.



p – орел
q – решка

Задача о разорении

ξ_0 — случ. величина, $p^{(0)}$

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ — случ. вел., независимые, незав. от ξ_0.

$$\boxed{\eta_j = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & q \end{cases}} \quad \mathbb{P}(\eta_j = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\eta_j = -1) = q$$

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{j=1}^{n} \eta_j.$$

Опр. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ — случайное блуждание.

Утв. 13 Посл-ть $\xi_0, \xi_1, \dots$ образует МЦ.

Д-во:

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \underbrace{\xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0}) \overset{?}{=} \mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1})$$

$\forall i_0, \dots, i_{n-1}$, т.ч. $\boxed{\mathbb{P}(\ \cdot\ ) \neq 0}$

$$\mathbb{P}(\xi_n=i_n \mid \xi_{n-1}=i_{n-1},\dots,\xi_0=i_0) = \mathbb{P}(\xi_{n-1}+\eta_n = i_n \mid \xi_{n-1}=i_{n-1},\dots,\xi_0=i_0)$$

$$= \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1} \mid \underbrace{\xi_{n-1}=i_{n-1},\dots,\xi_0=i_0}_{\text{незав. события}})$$

условие на $\xi_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$.

$(\xi_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in A$, где $A \subset \mathbb{Z}^n$

$$= \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1}) = \begin{cases} p, & i_n = i_{n-1}+1 \\ q, & i_n = i_{n-1}-1 \\ 0, & |i_n - i_{n-1}| \ne 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1}=i_{n-1}) = -\|- = \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1}),$$

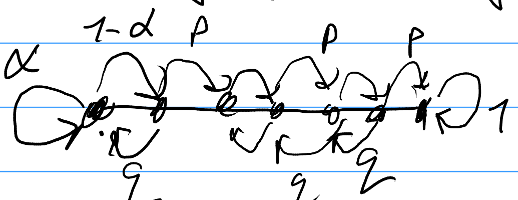
ч.т.д.

МПВ

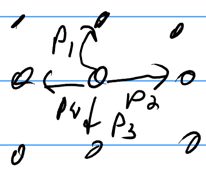
$$\Pi = \begin{pmatrix} q & 0 & p & & & & \\ & q & 0 & p & & & \\ & & q & 0 & p & & \\ & & & q & 0 & p & \\ & & & & q & 0 & p \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

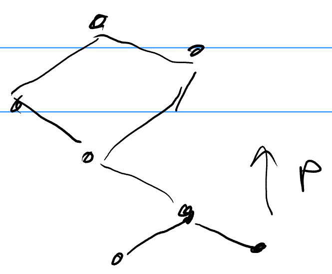
– счётное число состояний, $\underline{X = \mathbb{Z}}$.

Случайное блуждание с граничными условиями:



$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & & & \\ q & 0 & p & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & q & 0 & p & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





p_c

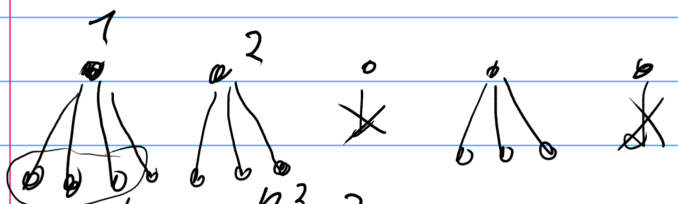
② Модель Гальтона – Ватсона (процесс рождения-гибели).

F. Galton (1822–1911)

ξ_n – число индивидуумов в n-ом поколении популяции

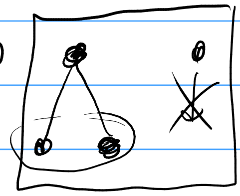
0) ξ_0

1) ξ_1



$\eta_0^1 = 4$, $\eta_0^2 = 3$

η_0^j, $j=1,\dots,\xi_0$



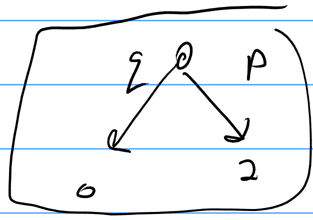
j-ый индивидуум порождает η_n^j потомков n-ого поколения

$(\eta_n^j)_{j\in\mathbb{N}, n\geq 0}$ – незав. одинаково распр. случ. величины. $n \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\xi_{n+1} = \eta_n^1 + \dots + \eta_n^{\xi_n}}.$$

от ξ_0 тоже незав.

Задача: (ξ_n) – МЦ.



Вероятность вымирания популяции:

Теор. 14. $\mathbb{P}(\exists n: \xi_n = 0) = \begin{cases} 1, & E\eta_n^j \leq 1 \\ < 1, & E\eta_n^j > 1, \end{cases}$

если $\mathbb{P}(\xi_0 \neq 0) > 0$ и $\eta_n^j \not\equiv 1$.

η_n^j

25.11.2011

$\boxed{\text{ЗБЧ}}$

$\omega \in \Omega$ $\quad \xi_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \xi(\omega)$ почти наверное

$(\xi_n)_{n\geq 0}$.

Опр Пусть ξ_n и ξ — сл. вел. на вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \geq 0$. Говорят, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ ("сходится по вероятности"), если $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\mathbb{P}(\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Упр $(\xi_n)_{n\geq 0}$, ξ, $(\eta_n)_{n\geq 0}$, η на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$.

Д-ть, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi + \eta$.

В частности, если (a_n) — числовая посл-ть, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, то $\xi_n + a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi + a$.

1 Классический ЗБЧ (закон больших чисел)

Теорема Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — посл-ть независимых случайных величин, таких что $\exists C > 0$: $\mathrm{Var}\, \xi_j \leq C$ $\forall j$. Тогда

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \quad \text{удовлетворяет} \quad \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

В частности, если ξ_j одинаково распределены, то $\mathbb{E}\xi_j = \mathbb{E}\xi_0$ и $\mathbb{E}S_n = n\,\mathbb{E}\xi_0$, то есть

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{E}\xi_0 .$$

орел решка

<u>Пример</u> $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \frac{1}{2}$.

Тогда $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k$ — число орлов за n бросков.

ЗБЧ $\Rightarrow$ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$. Доля орлов $\xrightarrow[\mathbb{P}]{} \frac{1}{2}$.

<u>Нер-во Чебышева</u> Пусть $\eta \geq 0$ — сл. вел.
($\eta(\omega) \geq 0$ для <u>почти всех ω</u>)

Тогда $$\mathbb{P}(\eta \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\eta}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ξ — сл. вел., $\mathbb{E}|\xi| < \infty$.

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \overset{Ч.}{\leq}$$
$$\leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Var}\xi}{\varepsilon^2}$$

<u>Док-во ЗБЧ</u>

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \varepsilon n) \overset{Ч.}{\leq}$$
$$\leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Var}\xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{C\cancel{n}}{\varepsilon^2 n^{\cancel{2}}} = \frac{C}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

ч.т.д.

$\Rightarrow$ образуют МЦ.

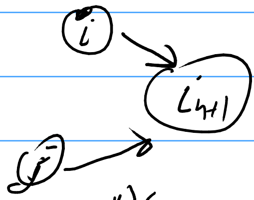
ξ_0, ξ_1, ξ_2 — незав. случ. вел., дискретные.

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0) =$$

$$= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1}) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n)$$

$$\parallel$$

$$p_{i_n i_{n+1}} \quad \forall i_n$$



$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1})$

(2) <u>ЗБЧ для МЦ</u>

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — МЦ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \; ?$$

мн-во состояний

$f(\xi_k)$. $\quad \xi_k \in X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

$f: X \to \mathbb{R}$.

<u>Пример</u> $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = m \in X \\ 0, & x \neq m \in X \end{cases}$

$\downarrow k$

(m) $\quad f(\xi_k) = 1 \qquad f(\xi_k) = 0.$

$n \neq m$

$(n)^k \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$ — сколько раз посетили состояние m за время n.

$\frac{S_n}{n}$ — частота посещения состояния m.

мн-во распред.

<u>Обозначения:</u> Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, а $p \in \mathcal{P}$ (то есть, $p = (p_j)_{j \in X}$, т.ч. $p_j \geq 0$ и $\sum_{j \in X} p_j = 1$). Тогда

"действие р-ия p на f"

$$\langle p, f \rangle := \sum_{j \in X} p_j f(j).$$

В частности, если ξ - сл. величина и p^ξ — её распределение (то есть, $p_j^\xi = \mathbb{P}(\xi \in j)$), то

$$\underset{\sum_j \mathbb{P}(\xi = j) f(j)}{\underset{\parallel}{\langle p^\xi, f \rangle}} = \mathbb{E} f(\xi).$$

$\boxed{\text{steady state}}$

<u>Напоминание</u> МЦ наз-ся экспоненциально эргодической, если она имеет ! стационарное состояние π, при этом $\exists\, C, \lambda > 0$, что

мера

$$\forall p^{(0)} \in \mathcal{P}, \quad |p^{(n)} - \underset{(\pi_j)_{j \in X}}{\underset{\parallel}{\pi}}|_1 \leq C \lambda^n, \quad \forall n.$$

$\boxed{0 < \lambda < 1}$

$$\boxed{|\eta|_1 := \sum_{j \in X_j} |\eta_j|}$$

<u>Лемма 1</u> Если МЦ экспон. эргодична, то

$$|\underset{\boxed{m_n}}{\underset{\parallel}{\mathbb{E} f(\xi_n)}} - \langle \pi, f \rangle| \leq \tilde{C} \lambda^n,$$

$\forall f$-ограничена.

Д-во $\mathbb{E} f(\xi_n) = \langle p^{(n)}, f \rangle =$

$$= \sum_{j \in X} p_j^{(n)} f(j)$$

$$\left| \mathbb{E} f(\xi_n) - \langle \pi, f \rangle \right| = \left| \sum_{j \in X} (p_j^{(n)} - \pi_j) f(j) \right|$$

$$\le \|f\|_\infty \, \underset{\wedge}{|p^{(n)} - \pi|_1}, \text{ где } \|f\|_\infty := \sup_{j \in X} |f(j)|$$

$$\underbrace{\|f\|_\infty C}_{\tilde{C}} \lambda^n.$$

Теорема (354) (однородная)

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — экспоненц. эргодическая МЦ со стац. состоянием π, а $f : X \to \mathbb{R}$ огр. ф-ция. Тогда случ. величина

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \quad \text{удовлетворяет:}$$

а) $\dfrac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0$ б) $\dfrac{\mathbb{E} S_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \langle \pi, f \rangle$

$\Rightarrow$ в) $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \langle \pi, f \rangle.$

Пример $f(x) = \begin{cases} 1, & x = m \in X. \\ 0, & x \ne m \end{cases}$

$\dfrac{S_n}{n}$ — частота посещения состояния m.

$354 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle \pi, f \rangle = \pi_m.$

В пределе "время $\to \infty$" частота посещения данного состояния стремится к его стац. вероятности.

Замечание Если $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независ.
$\Rightarrow f(\xi_0), f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ — независ.

Если $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — МЦ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(\xi_0), f(\xi_1), f(\xi_2)$ — МЦ

Нет!

Док-во 354

б) $\mathbb{E} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} f(\xi_k)$

$\mathbb{E} f(\xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \pi, f \rangle$ по лемме 1.

Упр Если (x_j) — числовая посл-ть,
т.ч. $x_j \xrightarrow{j\to\infty} x$, то $\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k}_{\text{сх-ть по Чезаро}} \xrightarrow{n\to\infty} x.$

Упр $\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} f(\xi_k) \to \langle \pi, f \rangle.$

а) $\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E} S_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left((S_n - \mathbb{E} S_n)^2 \geq \varepsilon^2 n^2 \right)$

$\leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{\varepsilon^2 n^2},$

$$\operatorname{Var} S_n \neq \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Var} f(\xi_i) \qquad \boxed{m_i := \mathbb{E} f(\xi_i)}$$

$$\operatorname{Var} S_n = \mathbb{E}(S_n - \mathbb{E}S_n)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i)-m_i)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f(\xi_i)-m_i)^2 + 2\sum_{0\le k<l\le n-1} \mathbb{E}\underbrace{(f(\xi_k)-m_k)}_{a}\underbrace{(f(\xi_l)-m_l)}_{b}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Var} f(\xi_i) + 2\sum_{0\le k<l\le n-1} \operatorname{cov}(f(\xi_k), f(\xi_l)).$$

<u>Лемма 2</u> $\quad |\operatorname{cov}(f(\xi_k), f(\xi_l))| \le C\lambda^{l-k}$, $\quad k<l$

для нек. $C>0$ и $\boxed{0<\lambda<1}$, не зав. от k и l.

f - огр., $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

$$|\operatorname{Var} f(\xi_i)| \le \mathbb{E}(f(\xi_i)-m_i)^2 \le 4\|f\|_\infty^2.$$

$$|m_i| \le \|f\|_\infty$$

$$P \le \underbrace{\cancel{\frac{4n\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2 n^2}}}_{\to 0} + 2C\underbrace{\cancel{\frac{\sum_{0\le k<l\le n-1}\lambda^{l-k}}{\varepsilon^2 n^2}}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\sum_{0\le k<l\le n-1} \lambda^{\overbrace{l-k}^{j}} \le n\sum_{j=1}^{n-1}\lambda^j \le \frac{n\lambda}{1-\lambda} = \text{const}\, n.$$

ч.т.д.

π – стац. состояние

Док-во леммы $\boxed{\mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_l)),\quad l>k,}$ $m_k := \mathbb{E} f(\xi_k).$

$$\mathrm{cov}_\infty(f(\xi_k), f(\xi_l)) := \mathbb{E}\Big[\underbrace{(f(\xi_k)-\langle\pi,f\rangle)}_{c}\cdot\underbrace{(f(\xi_l)-\langle\pi,f\rangle)}_{d}\Big].$$

Обозначим

$$\Delta_{kl} := |\mathrm{cov}(f(\xi_k), f(\xi_l)) - \mathrm{cov}_\infty(f(\xi_k), f(\xi_l))|$$

Покажем, что Δ_{kl} – мала.

Лемма 1 $\Rightarrow$ $|m_n - \langle f,\pi\rangle| \le C\lambda^n.$

$$|\mathbb{E}(ab-cd)| \le |\mathbb{E}[(a-c)b]| + |\mathbb{E}[c(b-d)]|$$

$$\Delta_{kl} \le \Big|(m_k-\langle\pi,f\rangle)\underbrace{\mathbb{E}(f(\xi_l)-m_l)}_{=0}\Big| +$$

$$+ \big|(m_l-\langle\pi,f\rangle)\mathbb{E}(f(\xi_k)-\langle\pi,f\rangle)\big| =$$

$$= (m_l-\langle\pi,f\rangle)(m_k-\langle\pi,f\rangle) \le (C\lambda^l)(C\lambda^k) = C_1\lambda^{l+k}.$$

$\boxed{g := f-\langle\pi,f\rangle}$ $\boxed{g(x) = f(x)-\langle\pi,f\rangle}$

$\boxed{l>k}$

$$\mathrm{cov}_\infty(f(\xi_k), f(\xi_l)) = \mathbb{E}\, g(\xi_k) g(\xi_l) =$$

$$= \sum_{a,b\in X} g(a)g(b)\,\mathbb{P}(\xi_l=b, \xi_k=a) =$$

$$= \sum_{a,b\in X} g(a)g(b)\,\mathbb{P}(\xi_l=b \mid \xi_k=a)\,\underbrace{\mathbb{P}(\xi_k=a)}_{p_a^{(k)}} =$$

$$\mathbb{P}(\xi_\ell = b \mid \xi_k = a) = \mathbb{P}(\xi_{\ell-k} = b \mid \xi_0 = a)$$

$$= \mathbb{P}({}^a\xi_{k-\ell} = b) \overset{\sim \pi_b}{}, \quad \text{где } {}^a\xi_n - \text{м.ц.}$$

имеет те же вер. перехода, что и ξ_n, но

$$\mathbb{P}({}^a\xi_0 = a) = 1, \quad \mathbb{P}({}^a\xi_0 = i) = 0 \text{ при } i \neq a.$$

Эксп. эрг. $\Rightarrow$ $\left| {}^a p^{(n)} - \pi \right|_1 \leq C\lambda^n.$

${}^a p_j^{(n)} = \mathbb{P}({}^a\xi_n = j)$ р-ие ${}^a\xi_n$

$$= \sum_{a,b\in X} g(a)g(b)\left({}^a p_b^{(\ell-k)} - \pi_b\right) P_a^{(k)} +$$

$$+ \sum_{a,b} g(a)g(b)\pi_b P_a^{(k)} = 0 \quad \leq$$

$$\sum_b g(b)\pi_b = \langle \pi, g\rangle = \langle \pi, f - \langle \pi, f\rangle\rangle =$$

$$= \langle \pi, f\rangle - \langle \pi, f\rangle = 0.$$

$$\leq \sum_{a\in X} g(a) p_a^{(k)} \sum_{b\in X}\left({}^a p_b^{(\ell-k)} - \pi_b\right) g(b) \overset{|\cdot|}{\leq}$$

$$\overset{|\cdot|}{\leq} \sum_{a\in X} |g(a)| P_a^{(k)} \|g\|_\infty \sum_{b\in X} \left|{}^a p_b^{(\ell-k)} - \pi_b\right| \leq$$

$$\sum_{b\in X} \left|{}^a p_b^{(\ell-k)} - \pi_b\right| = \left|{}^a p^{(\ell-k)} - \pi\right|_1$$

$$\leq \sum_{a\in X} |g(a)| p_a^{(k)} \|g\|_\infty C\lambda^{\ell-k} \leq$$

$$\leq C\lambda^{\ell-k}\|g\|_\infty^2 \sum_{a\in X} p_a^{(k)} = 1$$

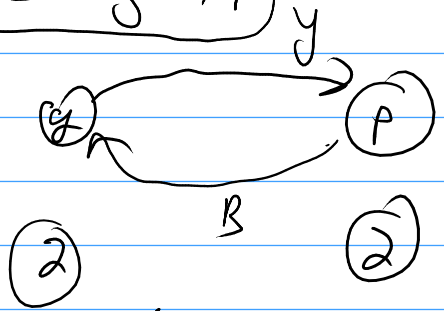
Итого, $|cov_\nu(f(\xi_k), f(\xi_l))| \le c\,\lambda^{l-k}\,\frac{(2\|f\|_\infty)^2}{\|g\|_\infty^2}$.

$\Rightarrow \quad |Cov(f(\xi_k), f(\xi_l))| \le C_1\lambda^{l-k} + C_2\lambda^{l+k} \le$

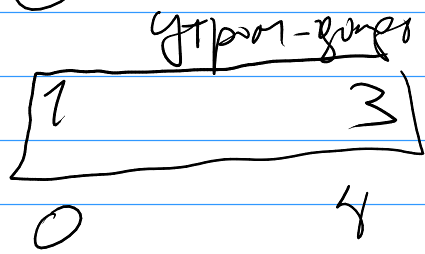
$\le \boxed{C_3\lambda^{l-k}}$.

ч.т.д.

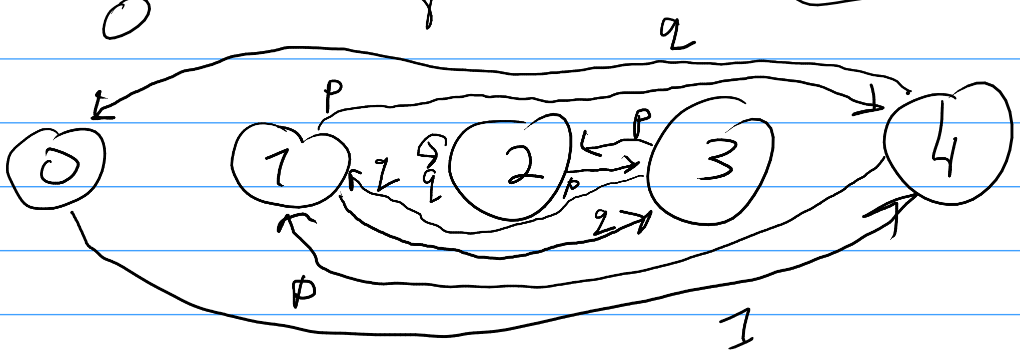
Задача 3 из к/р



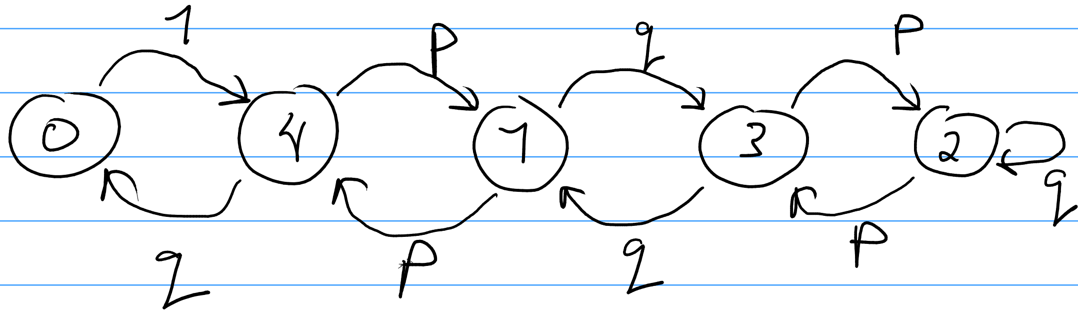
$\text{дождь} \Rightarrow \text{зонт}$



p — вер-ть дождя $q = 1 - p$



а)



~ случайное блуждание!

П - МПВ. П = ~~

б) $\exists ? \, k \geq 1 \quad (\Pi^k)_{ij} > 0 \quad \forall i, j.$

$\exists$-ли $k \geq 1$, т.ч. за k шагов можно попасть из любой точки в любую.

Да $\Rightarrow$ по эрг. теореме цепь экспоненциально эргодична.

в) $\mathbb{E}\tau$, где τ — время первого накопления

$\mathbb{E}\sigma$, где σ — время первого попадания в 0.

$\mathbb{P}_j$ — вер-ть при условии, что мы стартуем в состоянии j.

$\mathbb{E}_j$ — $\mathbb{E}$ отн. $\mathbb{P}_j$.

$\mathbb{E}_2\sigma = ?$ $\qquad \mathbb{E}_0\sigma = 0.$

$$\mathbb{E}_2\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}_2(\sigma = k)$$

ξ_n — м.ц.

$\mathbb{P}_2(\xi_0 = 2) = 1.$

$$\mathbb{P}_2(\sigma = k) = \mathbb{P}_2(\sigma = k \mid \xi_1 = 2)\,\mathbb{P}_2(\xi_1 = 2) + \mathbb{P}_2(\sigma = k \mid \xi_1 = 3)\,\mathbb{P}(\xi_1 = 3) =$$

$$= \mathbb{P}_2(\sigma = k-1)\,q + \mathbb{P}_3(\sigma = k-1)\,p$$

$$\mathbb{E}_2\sigma = \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\Big(\mathbb{P}_2(\sigma=k-1)q + \mathbb{P}_3(\sigma=k-1)p\Big) +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}_2(\sigma=k)}_{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}_2(\sigma=k)q + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(\sigma=k)p + 1$$

$$= q\,\mathbb{E}_2\sigma + p\,\mathbb{E}_3\sigma + 1$$

$$\boxed{(1-q)\,\mathbb{E}_2\sigma = p\,\mathbb{E}_3\sigma + 1}$$

$$\mathbb{E}_3\sigma = p\,\mathbb{E}_2\sigma + q\,\mathbb{E}_1\sigma + 1.$$

$$\mathbb{P}_3(\sigma=k) = \mathbb{P}_3(\sigma=k \mid \xi_1=2)p +$$

$$+ \mathbb{P}_3(\sigma=k \mid \xi_1=1)q =$$

$$= \mathbb{P}_2(\sigma=k-1)p + \mathbb{P}_1(\sigma=k-1)q$$

$$\mathbb{E}_1\sigma = p\,\mathbb{E}_4\sigma + q\,\mathbb{E}_3\sigma + 1$$

$$f_j := \mathbb{E}_j\sigma.$$

$$\mathbb{E}_4\sigma = q\,\underset{0}{\underset{\|}{\mathbb{E}_0\sigma}} + p\,\mathbb{E}_1\sigma + 1$$

$(1-q)f_2 = pf_3+1,\quad f_3 = pf_2+qf_1+1,$

$f_1 = pf_4+qf_3+1,\quad f_4 = pf_1+1.$

$f_2 = ?$

τ — время 1-го натыкания.

$$\tau = \sigma + \tilde{\tau}_0$$

время 1-го натыкания при старте из 0.

17.12.21.

Алгоритм Метрополиса-Хастингса

X — мн-во состояний

Лемма 1 Пусть имеется МЦ с вероятностями перехода (p_{ij}) и состояние $\pi = (\pi_j)_{j \in X}$ удовлетворяющее

$\Pi = (p_{ij})$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i,j \in X. \qquad (1)$$

Тогда π — стационарное состояние.

это достаточное, но не необходимое условие, чтобы π было стац. состоянием.

Д-во: $\boxed{\pi \Pi = \pi}$

$$(\pi \Pi)_j = \sum_i \pi_i p_{ij} =$$

$$= \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j$$

ч.т.д.

$$p^{(0)} = \pi \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_i p_{ij} &= P(\xi_0 = i, \xi_1 = j) \\ &\parallel \\ \pi_j p_{ji} &= P(\xi_0 = j, \xi_1 = i) \end{aligned}\right\} \text{ обратимость}$$

Пусть имеется м.ц. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, однородная, с вер. перехода (p_{ij}), т.ч. $p_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow p_{ji} \neq 0$, $\forall i,j$

$$i \rightleftarrows j$$

Пусть имеется $\pi \in P(X)$, распределение, т.ч. $\pi_i > 0$ $\forall i \in X$.
Хотим модифицировать переходные вер-ти p_{ij} так, чтобы для полученной цепи $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots$ π было стационарным состоянием.

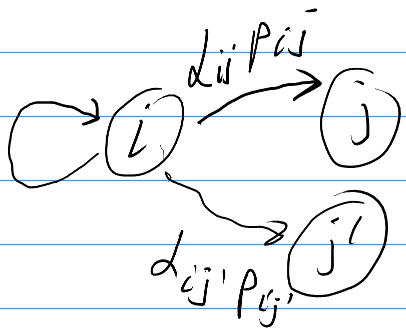
q_{ij} — переходные вер-ти цепи $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots$

Пусть
$$\boxed{q_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} p_{ij}, & i \neq j \\ 1 - \sum\limits_{k \neq i} \alpha_{ik} p_{ik}, & i = j \end{cases}}$$

Подберем α_{ij} так, чтобы было выполнено (1)

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \quad \forall i, j.$$

всегда верно при $i = j$



При $i \neq j$:

$$\pi_i \alpha_{ij} p_{ij} = \pi_j \alpha_{ji} p_{ji}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}.$$

Пусть $\boxed{\alpha_{ij} \leq 1}$

обеспечит, что $\sum\limits_{j: i \neq j} q_{ij} \leq 1$ $\forall j$

$$\boxed{\alpha_{ij} p_{ij} \leq 1, \quad \alpha_{ji} p_{ji} \leq 1}$$

Выберем α_{kl} максимальными, удовлетворяющими условиям выше.

$$\boxed{\alpha_{ij} = \min\left(1, \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}\right)}$$

(1) $\pi_j p_{ji} \geq \pi_i p_{ij} \Rightarrow \alpha_{ij} = 1$, $\alpha_{ji} = \dfrac{\pi_i p_{ij}}{\pi_j p_{ji}} \Rightarrow$ ок

В частности, $p_{ij} = p_{ji}$, то $\alpha_{ij} = \min\left(1, \frac{\pi_j}{\pi_i}\right)$.

По Лемме 1, π — стац. состояние МЦ с перех. вероятностями (q_{ij})

<u>Замечание 2</u> Если МЦ $\Pi = (p_{ij})$ — перемешивающая, то новая МЦ

$\tilde{\Pi} = (q_{ij})$ — перемешивающая $\left(\exists s: (\tilde{\Pi}^s)_{ij} > 0\right)$

π — ! стац. сост. цепи и $p^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$,

$|p^{(n)} - \pi|_1 \le C\lambda^n$, $0 < \lambda < 1$, $\forall n$, $p^{(0)}$

$\lambda = 1 - \min\limits_{i,j} q_{ij}^{(s)} < 1$,

$\Rightarrow \min q_{ij}^{(s)}$ максимизировать

$\boxed{\text{Замечание 3}}$ Состояние π достаточно знать с точностью до умножения на const.

$\pi_j, \pi_i = ?$ $\frac{\pi_i}{\pi_j}$ $\forall i, j$

$\boxed{\text{const } \pi_j}$

$\sum \pi_j = 1$ (?!)

Применение к расшифровке текстов.

не знаем

S = "ENTER HAMLET HAM TO BE ..."

$\sigma_*: \{\underbrace{A, B, C, D, \dots, Z, \_}_{A}\} \to$, биекция.

$\sigma_* = ?$

$\hat{S} = \sigma_*(S)$ – дано.

$\sigma_*(S) = \hat{S} = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_N)$

шифр. $i_j \in A$.

$\sigma_*^{-1}(\hat{S}) = S$.

Текст – м.ц., то есть

S – траектория этой мц.

Мн-во состояний $= A$. $\forall i, j \in A$, r_{ij} – переходные вер-ти.

Откуда взять r_{ij}? Вычислить статистически.

$$S_{\sigma_*} = (\sigma_*^{-1}(i_1), \sigma_*^{-1}(i_2), \dots, \sigma_*^{-1}(i_N))$$

Найти σ_*, такую что $\mathbb{P}(S_{\sigma_*}) \to \max$.

Тогда мы верим, что $S_{\sigma_*} = S$.

$$\mathbb{P}(j_1, \dots, j_N) = p^{(0)}_{j_1} r_{j_1 j_2} r_{j_2 j_3} \dots r_{j_{N-1} j_N}.$$

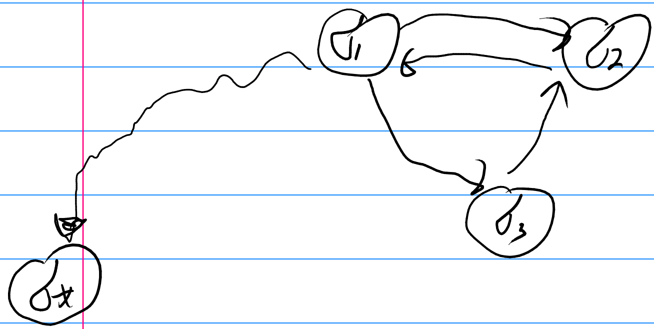
Иными словами, требуется найти перестановку σ_*, максимизирующую

$$\mathbb{P}(S_{\sigma_*}) = p^{(0)}_{\sigma_*^{-1}(i_1)} r_{\sigma_*^{-1}(i_1)\sigma_*^{-1}(i_2)} \dots r_{\sigma_*^{-1}(i_{N-1})\,\sigma_*^{-1}(i_N)}$$

$|A| = 27$. Число перестановок $= 27!$

Обозначим $\hat{\pi}_\sigma = \mathbb{P}(S_\sigma)$.

Построим $\underbrace{}_{}$ эргодич. МЦ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ с мн-ом состояний = мн-ву перестановок на A, для которой вектор $(\hat{\pi}_\sigma)_\sigma$ пропорционален стац. состоянию.



$$Z = \sum_\sigma \hat{\pi}_\sigma \neq 1$$

$$\pi = \frac{\hat{\pi}}{Z}$$ — стац. сост. цепи $\xi_0, \xi_1, \dots$

Допустим, построили такую МЦ. И что?

$$\mathbb{P}(\xi_n = \sigma) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_\sigma.$$

При $n \gg 1$, $\mathbb{P}(\xi_n = \sigma) \approx \pi_\sigma = const\ \mathbb{P}(S_\sigma)$

$n+1$

$n+2$ $\Rightarrow$ продолжая процесс достаточно долго, ξ_n "стабилизируется" в окр-ти искомой перестановки σ_*.

$\dots$

ξ_j, η_k – перестановки A

Как построить цепь $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$?

Метрополис – Хастингс.

Возьмём сперва цепь $\eta_0, \eta_1, \dots$, где

$\eta_{k+1} = t \circ \eta_k$, где t – случайная транспозиция,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4}$$

все транспозиции равновероятны.

$$\mathbb{P}(t_0) = \frac{1}{C_n^2 + 1}.$$

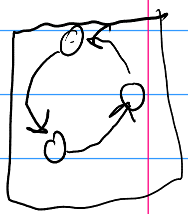
$n = |A| = 27$

вер-ти перехода в $\eta_0, \eta_1, \dots$ – $(p_{\sigma\sigma'})$

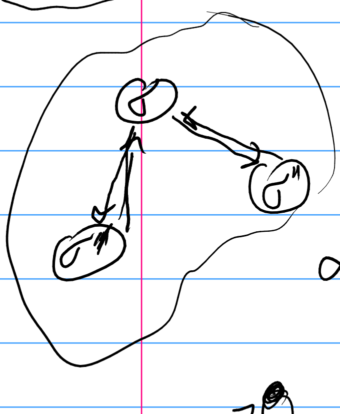
Из каждой перестановки выходит $\frac{26 \cdot 27}{2} + 1$ стрелок.

Модифицируем цепь (η_j) согласно М-Х:

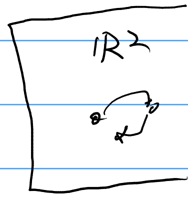
выбрал случ. транс.



$$q_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} \alpha_{\sigma\sigma'} \, p_{\sigma\sigma'}, & \sigma \neq \sigma' \\ 1 - \sum\limits_{\sigma'' \neq \sigma} p_{\sigma''\sigma} \, \alpha_{\sigma''\sigma}, & \sigma' = \sigma \end{cases}$$



$$\alpha_{\sigma\sigma'} = \min\left(1, \frac{\hat{\pi}_{\sigma'}}{\hat{\pi}_{\sigma}}\right) =$$



$$= \min\left(1, \frac{\mathbb{P}(S_{\sigma'})}{\mathbb{P}(S_{\sigma})}\right).$$

$\alpha_{\sigma\sigma'} = 1$, $\hat{\pi}_{\sigma'} > \hat{\pi}_{\sigma}$

$\alpha_{\sigma\sigma'} = \frac{\hat{\pi}_{\sigma'}}{\hat{\pi}_{\sigma}}$, $\hat{\pi}_{\sigma'} < \hat{\pi}_{\sigma}$