

Листок 3. Угловой момент и спин. Тождественные частицы.

Срок сдачи листка — 20 декабря 2021 г.

1. Одной из наблюдаемых характеристик квантовомеханической системы является ее момент импульса¹, задаваемый векторным оператором $\hat{\vec{J}}$. Состояния системы $|m, j\rangle$ являются собственными векторами операторов $(\hat{\vec{J}})^2$ и \hat{J}_3 :

$$(\hat{\vec{J}})^2 |m, j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |m, j\rangle, \quad \hat{J}_3 |m, j\rangle = \hbar m |m, j\rangle.$$

- а) Найдите средние значения и дисперсии \hat{J}_1 и \hat{J}_2 в состоянии $|m, j\rangle$.
б) Проекция момента импульса системы на направление, задаваемое единичным вектором \vec{n} , характеризуется оператором $(\hat{\vec{J}}, \hat{n})$. Для случая

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

определите среднее значение и дисперсию этой наблюдаемой в состоянии $|m, j\rangle$.

- в) **(необязательная)** Определите вероятности получить при измерении проекций момента \hat{J}_1 и $(\hat{\vec{J}}, \hat{n})$ максимально возможное значение $\hbar j$, если система находится в состоянии $|m, j\rangle$.

Указание. Здесь удобно воспользоваться операторами, играющими по отношению к \hat{J}_1 и $(\hat{\vec{J}}, \hat{n})$ такую же роль, какую играет оператор \hat{J}_+ по отношению к \hat{J}_3 .

2. Квантовомеханическая система состоит из двух частиц. Состояние каждой частицы полностью характеризуется оператором ее момента импульса $\hat{\vec{J}}^{(a)}$, где $a = 1, 2$ — номера частиц.

Наблюдатель приготавливает состояние системы, в котором достоверно известно, что значения скалярных квадратов моментов $(\hat{\vec{J}}^{(a)})^2$ равны $\hbar^2(j_a+1)j_a$, а значения проекций на ось Oz моментов $\hat{J}_3^{(a)}$ равны $\hbar m_a$ ($j_a \in \mathbb{Z}^+/2$, $-j_a \leq m_a \leq j_a$). Обозначим такое состояние

$$|\Psi\rangle = |m_1, j_1\rangle \otimes |m_2, j_2\rangle.$$

- а) Чему равны в состоянии $|\Psi\rangle$ средние значения компонент полного момента импульса системы $\hat{J}_i := \hat{J}_i^{(1)} + \hat{J}_i^{(2)}$, а также его скалярного квадрата $(\hat{\vec{J}})^2$?
б) Для частного случая $|\Psi\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2 - 1, j_2\rangle$ определите все возможные результаты измерения наблюдаемой $(\hat{\vec{J}})^2$, а также вероятность их наблюдения.

В случае $j_1 = j_2$ наблюдатель может приготовить скалярное состояние $|\Phi\rangle$, полный момент импульса которого достоверно равен нулю: $(\hat{\vec{J}})^2 |\Phi\rangle = 0$.

- в) Определите вероятности получения всех возможных результатов при измерении в состоянии $|\Phi\rangle$ 3-ей проекции момента импульса первой частицы $\hat{J}_3^{(1)}$. Какие результаты можно получить при последующем измерении 3-й проекции момента импульса второй частицы?

Указание. Удобно будет воспользоваться справедливыми для скалярного состояния соотношениями $\hat{J}_3 |\Phi\rangle = \hat{J}_\pm |\Phi\rangle = 0$.

¹Это может быть ее внутренний момент — спин, или внешний — момент импульса частицы в пространстве, мы его далее называем орбитальным моментом.

3. **3-мерный изотропный гармонический осциллятор.** Рассмотрим модель с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}^3,$$

в координатном представлении и в сферических координатах (обсуждение этой модели в терминах операторов рождения-уничтожения см. в лекции 03.11.2021).

Используя базис собственных векторов полного набора наблюдаемых $\{E, \vec{M}^2, M_3\}$ (здесь E и $\vec{M} = \vec{q} \times \vec{p}$ — энергия и орбитальный момент системы, соответственно) в стационарном уравнении Шредингера можно отделить угловые переменные θ и ϕ и свести задачу к решению радиального уравнения (см. лекции 17.11.2021 и 24.11.2021, а также записки лекции №9 2020г., стр. 1–3.)

а) Определите асимптотики радиального уравнения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow +\infty$. Используя их, постройте анзац для поиска состояний дискретного спектра \hat{H} — связанных состояний системы. Вычислите значения энергии E для состояний дискретного спектра системы.

Указание. Действуйте аналогично тому, как это делалось для построения связанных состояний атома водорода

б) Для каждого дискретного уровня энергии E определите кратность его вырождения и возможные значения величины орбитального момента системы \vec{M}^2 при данном значении E .

в) Найдите плотность пространственного распределения изотропного гармонического осциллятора в основном и в первом возбужденном состояниях в случае, когда $M_3 = 0$. Выражения для сферических гармоник можно не выводить, а позаимствовать, например, в лекциях:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta, \quad Y_1^0 = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.$$

4. Система из четырех не взаимодействующих друг с другом тождественных частиц со спином $1/2$ помещена во внешнее силовое поле с потенциалом 3-мерного изотропного гармонического осциллятора. Таким образом пространство состояний системы — $(L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$.

а) Определите значения энергии основного и первого возбужденного состояний этой системы, а также кратности их вырождения.

б) Для основного состояния системы определите возможные значения

- полного спина системы частиц;
- полного орбитального момента системы;
- полного момента импульса системы — суммы ее спина и орбитального момента.

в) **(необязательная)** Запишите волновую функцию основного состояния системы с нулевыми значениями полного спина и полного орбитального момента.