Математические основы Квантовой механики

Вопросы к экзамену 2021

1. Постулаты канонического квантования гамильтоновой системы с конечным числом степеней свободы:

    1. Алгебра наблюдаемых и канонические перестановочные соотношения.
    2. Пространство состояний квантовой системы, принцип суперпозиции.
    3. Реализация (представление) алгебры наблюдаемых в пространстве состояний.
    4. Статистическая интерпретация спектра наблюдаемой, ее собственных векторов, вероятность результатов измерений.
    5. Временная эволюция (динамика) в квантовой механике.

2. Наблюдаемые в квантовой теории: самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Результаты измерений наблюдаемой в заданном состоянии квантовой системы, их вероятности, среднее значение и дисперсия измерений. Редукция вектора состояния квантовой системы после измерения. Полный набор наблюдаемых и приготовление чистого состояния системы.

3. Резольвента самосопряженного оператора и его спектр. Операторы координтаты и импульса как пример неограниченных операторов с непрерывным спектром. Понятие об обобщенных собственных векторах, отвечающих непрерывному спектру (на примере операторов координаты и импульса).

4. Одновременная измеримость наблюдаемых в квантовой механике и классической механике: причины существования неизмеримых одновременно наблюдаемых. Математическое условие одновременной измеримости. Вывод соотношений неопределенности Гейзенберга для канонически сопряженных координаты и импульса.

5. Динамика в квантовой теории: картины Шредингера и Гейзенберга, их унитарная эквивалентность. Оператор эволюции для консервативной системы. Задача на собственные значения и собственные состояния гамильтониана (стационарное уравнение Шредингера) как задача, решающая вопрос о динамике произвольного состояния в квантовой механике.

6. Координатное представление в квантовой механике. Волновая функция, ее статистическая интерпретация. Общие свойства одномерного движения в потенциале $U(x)$. Связанные состояния и собственные значения энергии для движения частицы в одномерной потенциальной яме глубины U_0 и ширины L.

7. Квантование одномерного гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. Энергетический спектр и собственные состояния. Собственные состояния в координатном представлении, полиномы Эрмита.

8. Симметрии квантовой системы и интегралы движения как генераторы унитарного представления группы симметрии. Инвариантность относительно вращений трехмерного пространства и угловой момент в квантовой механике. Выражение орбитального момента в терминах операторов координаты, импульса и генераторов (элементов алгебры Ли) группы SO(3).

    Примечание. Операторы углового момента квантовой системы определяют закон преобразования векторов состояния и наблюдаемых относительно действия группы вращений $SO(3)$. Угловой момент дается суммой орбитального момента и спина, иногда термин “угловой момент” заменяют термином “полный момент импульса”, а “орбитальный момент” — термином “момент импульса”.

9. Алгебра углового момента (алгебра Ли $su(2)$), ее универсальная обертывающая, оператор Казимира (центральный элемент). Представление генераторов алгебры углового момента самосопряженными операторами, спектр и общие собственные вектора оператора Казимира и одного из генераторов в неприводимом представлении (алгебраический подход). Спин квантовой частицы.

10. Сложение угловых моментов. Пространство состояний системы, состоящей из двух подсистем с угловыми моментами J_1 и J_2, вид операторов углового момента составной системы в терминах соответствующих операторов составных частей. Спектр и собственные вектора операторов суммарного углового момента (разложение в прямую сумму неприводимых слагаемых пространства состояний составной системы). Явное построение соответствующих подпространств для суммы моментов $J_1 = 1$ и $J_2 = 1/2$.

11. Движение частицы в центрально-симметричном потенциале $U(|\vec{x}|)$в пространстве $\mathbb{R}^3$. Сохраняющиеся величины, полный набор наблюдаемых. Сферические координаты, разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера. Собственные функции операторов орбитального момента в сферических координатах (сферические функции). Эффективное стационарное уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции. Асимптотика решения в начале координат. Вырождение собственных значений гамильтониана, минимально возможная кратность этого вырождения.

12. Тождественные частицы в квантовой механике. Бозоны и фермионы, связь спина со статистикой. Принцип запрета Паули. Волновая функция системы n электронов: симметрии радиальной и спиновой части волновой функции. Пример построения волновой функции основного состояния атома гелия (пространственно-орбитальная часть волновой функции у двух электронов одинакова и отвечает низшему энергетическому уровню $n = 1$ водородоподобного атома).