Семинар 13

1. Найти группу автоморфизмов поля из четырех элементов.

2. Найти группу автоморфизмов каждого перечисленного кольца или поля: $\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (последний вопрос только для студентов, знакомых с этим полем).

3. Найти группу $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, состоящую из автоморфизмов поля комплексных чисел, тождественных на подполе вещественных чисел.

4. Рассмотрим кольцо R без делителей нуля и его поле частных $\mathrm{Fr}(R)$. Доказать, что любой автоморфизм α кольца R продолжается до автоморфизма α' поля $\mathrm{Fr}(R)$.

5. Доказать, что отбражение $\alpha \to \alpha'$ задает вложение группы автоморфизмов кольца R в группу автоморфизмов его поля частных $\mathrm{Fr}(R)$.

6. Всегда ли отображение из задачи 5 является эпиморфизмом?

7. Просуммировав функцию Эйлера по всем делителям натурального числа, Вы получите само число. Объясните этот фокус.

8. Доказать странную лемму: пусть G – конечная группа, в которой уравнение $x^N = e$ имеет не более, чем N решений при любом натуральном $N \geq 1$. Тогда G – циклическая группа.

9. Конечная подгруппа мультипликативной группы поля всегда циклическая. Доказать.

10. Решить уравнение $X^3 = 1$ в поле 3-адических чисел.