Семинар 14

Поля. Расширения. Башни.

1. Найдите характеристику поля K, если $a^4 = a$ для любого $a \in K$.

2. Пусть K – поле характеристики p. Тогда для любого $a \in K$ многочлен $X^p - X + a$ либо не имеет корней в K, либо имеет p корней в K.

3. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, если $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$.

4. Докажите, что хотя бы одно из чисел $e + \pi, e\pi$ должно быть трансцендентным над полем рациональных чисел.

5. Пусть $L = \mathbb{F}_2(\alpha)$, $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$. Вычислить $(\alpha^2 + \alpha + 1)^{-1}, \alpha^{-1}, \alpha^{15}$.

6. Вычислить $\frac{1+2^{1/3}}{1+2^{1/3}+4^{1/3}}$ в поле $\mathbb{Q}(2^{1/3})$.

7. Найти поле разложения многочлена $X^8 - 4$ над полем $\mathbb{Q}(i)$.

8. Докажите, что все комплексные числа, алгебраические над полем рациональных чисел, образуют поле, которое алгебраически замкнуто.

9. Пусть многочлен $f(x) \in K[x]$ неприводим над полем K и $L > K$ – расширение поля K, причем степень этого расширения взаимно проста со степенью многочлена $f(x)$. Докажите.что многочлен $f(x)$ неприводим и над полем L.

10. Пусть $L > K$ – расширение поля K простой степени q. Предположим, что многочлен $f(x) \in K[x]$ имеет простую степень p, неприводим над полем K, но приводим над L. Тогда $p = q$ (доказать).