Семинар 1

Гармонические осцилляторы

Вводный семинар. Мы рассмотрим примеры расчёта движения простейших механических систем (материальных точек) под действием идеализированных

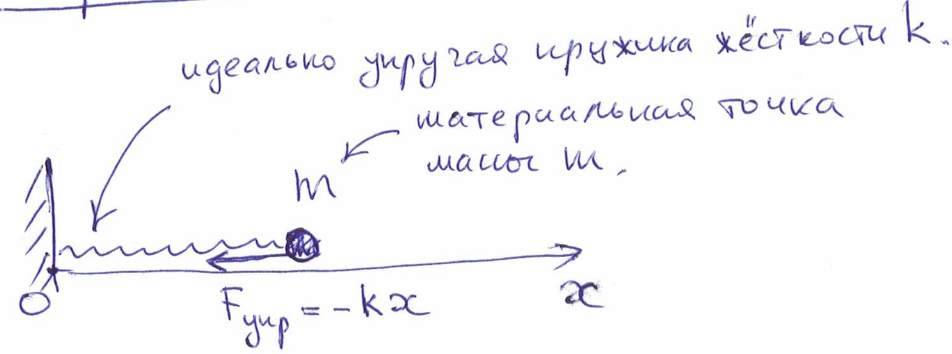
сил упругости $F_{упр} = -kx$

вязкого трения $F_{тр} = -\gamma \dot{x}$

гармонических внешних сил $F_{внешн} = f \sin(\Omega t)$

Увидим, как работает 2-й закон Ньютона и зачем в курсе дифуров изучались линейные дифуры с постоянными коэффициентами.

1 Гармонический осциллятор



Точечная масса m на конце идеально упругой пружины — это модель гармонического осциллятора.

Для определения его движения вводим

инерциальную систему координат $\overrightarrow{Ox}$, и выписываем в ней 2-й закон Ньютона:

$$\underline{m\ddot{x} = F_{упр} = -kx}.$$

Разрешаем этот дифур 2-го порядка относительно старшей производной:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega^2 := \frac{k}{m}} \qquad (1)$$

Это уравнение движения гармонического осциллятора. — линейный однородный дифур 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad A, B$$

$$\text{или} \quad C\sin(\omega t + \varphi) \qquad C, \varphi$$

константы интегрирования.

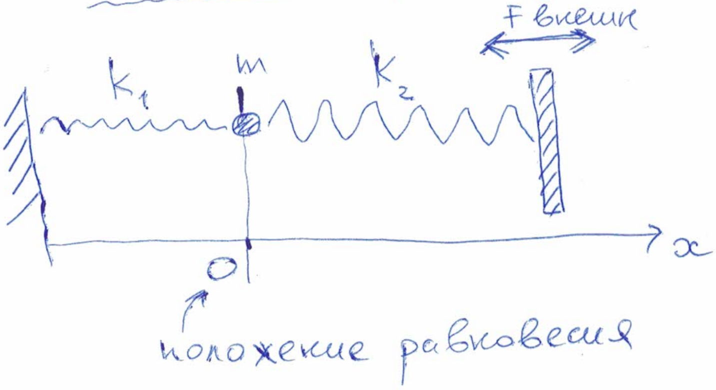
Для однозначного определения движения системы нужно задать начальные координату и скорость точки:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

тогда
$$\boxed{x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

Это — универсальное правило ньютоновой механики — принцип причинности.

② Осциллятор под действием внешней силы



Прикрепим к материальной точке m (другое её название — частица) две пружины жёсткости k_1 и k_2 (см. рис.) и начнем гармонически раскачивать правую стенку (имитация внешней силы).

2-й закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -k_1 x + k_2(-x + \underbrace{a\sin\Omega t}_{\text{закон движения правой стенки}})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = F\sin\Omega t} \qquad (2)$$

Здесь $\omega^2 = \dfrac{k_1+k_2}{m}$; $F = \dfrac{k_2 a}{m}$

Получили неоднородный линейный дифур с постоянными коэффициентами.

(*) Если $\Omega \neq \omega$, то его частное решение:

$$x_{\text{частн.}}(t) = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t$$

константы надо подобрать

Подстановка $x''_{\text{части}}$ в (2) даёт:

$$A(-\Omega^2+\omega^2)\sin\Omega t + B(-\Omega^2+\omega^2)\cos\Omega t = F\sin\Omega t$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{F}{\omega^2-\Omega^2}, \quad B = 0$$

Итак: $$\boxed{x_{\text{части}}(t) = \frac{F}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t, \text{ при } \Omega\neq\omega}$$

$$\boxed{x_{\text{общ}}(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t + \frac{F}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t}$$

Начальные данные фиксируют C и D:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = C \\ \dot{x}(0) = v_0 = D\omega + \dfrac{F\Omega}{\omega^2-\Omega^2} \end{cases}$$

Замечаем, что при $\Omega \to \omega$ амплитуда колебаний осциллятора возрастает до ∞.

Это — явление резонанса.

Его надо учитывать при проектировании мостов и т.п. (была история с солдатами, маршировавшими по мосту)

(*) Если $\Omega = \omega$, то частное решение (2) надо искать в виде

$$\boxed{x_{\text{части}}(t) = t\,(A\sin\omega t + B\cos\omega t)}$$

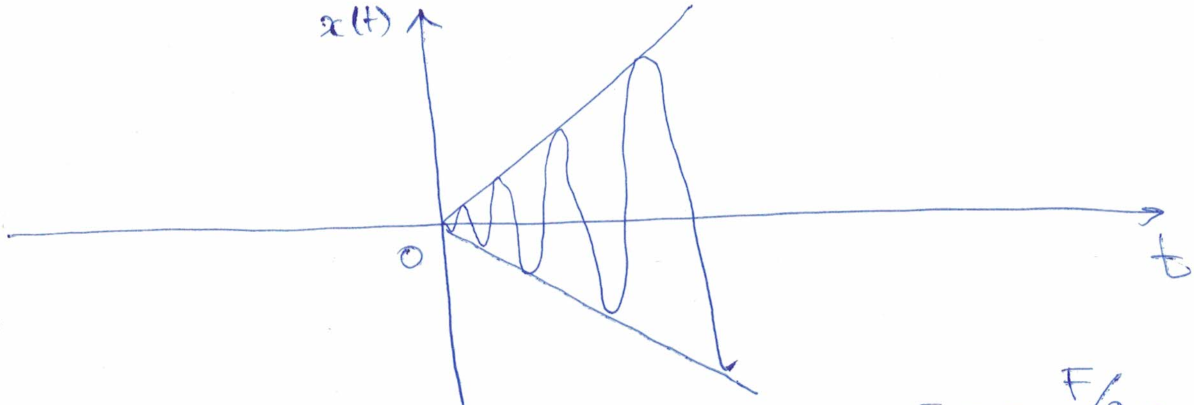
Подстановка $x_{\text{части}}$ в (2) фиксирует коэфф. A и B:

$$A = 0 \;;\; B = -\frac{F}{2\omega}$$

Итак: $\boxed{x_{\text{частн}}(t) = -\frac{F}{2\omega}\, t \cos\omega t}$ при $\Omega = \omega$

$$\boxed{x_{\text{общ.}}(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + \frac{F}{2\omega}}{\omega} \sin\omega t - \frac{F}{2\omega}\, t\cos\omega t,}$$

где $x_0 = x(0)$ $v_0 = \dot{x}(0)$



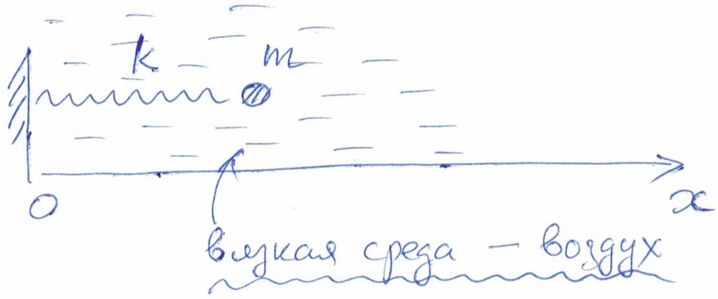
Пример резонансного движения при $x_0 = 0$, $v_0 = -F/2\omega$.

Видно, что внешняя гармоническая сила "закачивает" энергию в систему, всё больше и больше, приводя в конце концов к её разрушению.

Такого не случается при $\Omega \neq \omega$: там внешняя сила может "закачать" конечную порцию энергии в систему (амплитуда $\left|\frac{F}{\omega^2 - \Omega^2}\right|$ колебаний, вызванных внешней силой, может быть большой, но она ограничена), а затем происходит обмен энергией между внешним источником силы и осциллятором "туда $\leftrightarrow$ сюда".

На самом деле идеальный резонанс никогда не реализуется из-за наличия сил трения. Рассмотрим их влияние

3 Осциллятор с трением



$$F_{тр} = -\gamma \dot{x}$$

2-й закон Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0} \qquad (3)$$

где $\rho := \dfrac{\gamma}{2m}$; $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

Корни характеристического уравнения дифура (3)

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

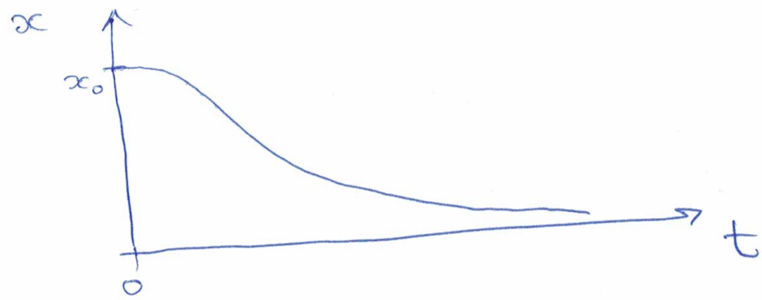
(*) Если $\rho > \omega$, то $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} < 0$

Это апериодическое затухающее движение:

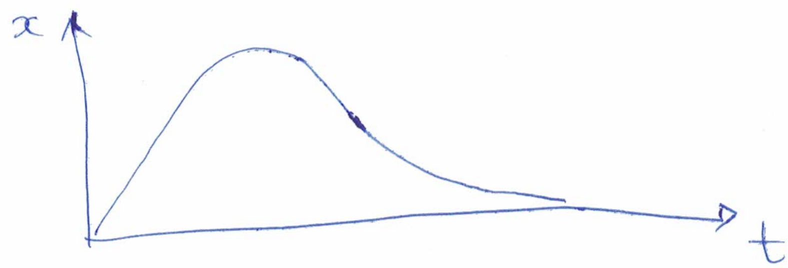
$$\boxed{x_{общ}(t) = e^{-\rho t}\left(Ae^{\delta t} + Be^{-\delta t}\right), \quad \delta := \sqrt{\rho^2 - \omega^2} < \rho}$$

Примеры:

если $\dot{x}(0)=0$ $\quad x(t)=x_0 e^{-\rho t}\left(\operatorname{ch}\delta t+\frac{\rho}{\delta}\operatorname{sh}\delta t\right)$



если $x(0)=0$ $\quad x(t)=\frac{v_0}{\delta}e^{-\rho t}\operatorname{sh}\delta t$



* Если $\rho=\omega$, то $\lambda_{1,2}=-\omega$ – кратный корень

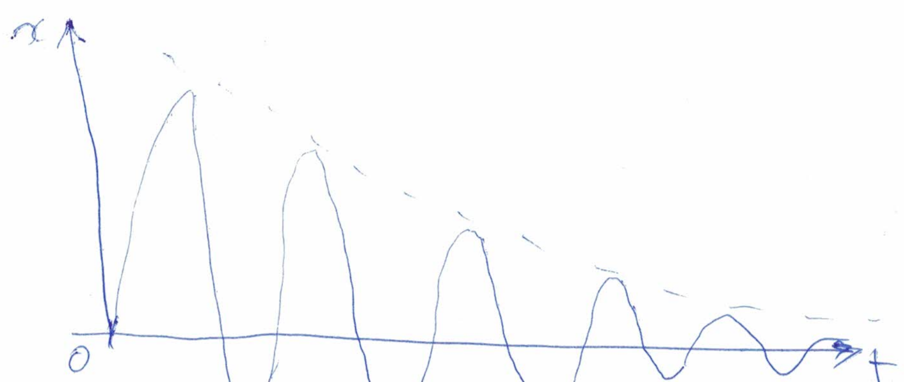
$$\boxed{x_{общ}(t)=e^{-\omega t}(A+Bt)}$$

Движение всё равно апериодичное и затухающее

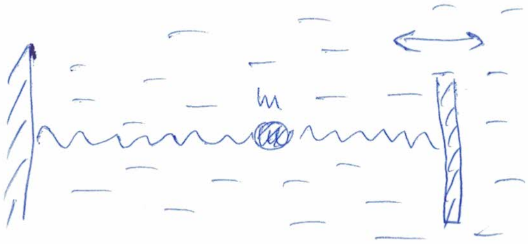
* Если $0<\rho<\omega$, то имеем периодические затухающие колебания: $\lambda_{1,2}=-\rho\pm i\delta$, $\delta:=\sqrt{\omega^2-\rho^2}$

$$\boxed{x_{общ}(t)=e^{-\rho t}(A\cos\delta t+B\sin\delta t)}$$

Пример:



④ Осциллятор с трением и внешней силой



Его движение описывается неоднородным дифуром

$$\boxed{\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = F\sin\Omega t} \qquad (4)$$

При $\rho > 0$ корни характеристического уравнения имеют $\neq 0$ вещественную часть и не совпадают с $\pm i\Omega$, поэтому частное решение ищем в виде

$$\boxed{x_{\text{частн}}(t) = C\sin(\Omega t + \delta)} \qquad (5)$$

Подставляя $x_{\text{частн}}$ в (4) получаем условия на C и δ:

$$C\{(-\Omega^2 + \omega^2)\sin(\Omega t + \delta) + 2\rho\Omega\cos(\Omega t + \delta)\} = F\sin\Omega t$$

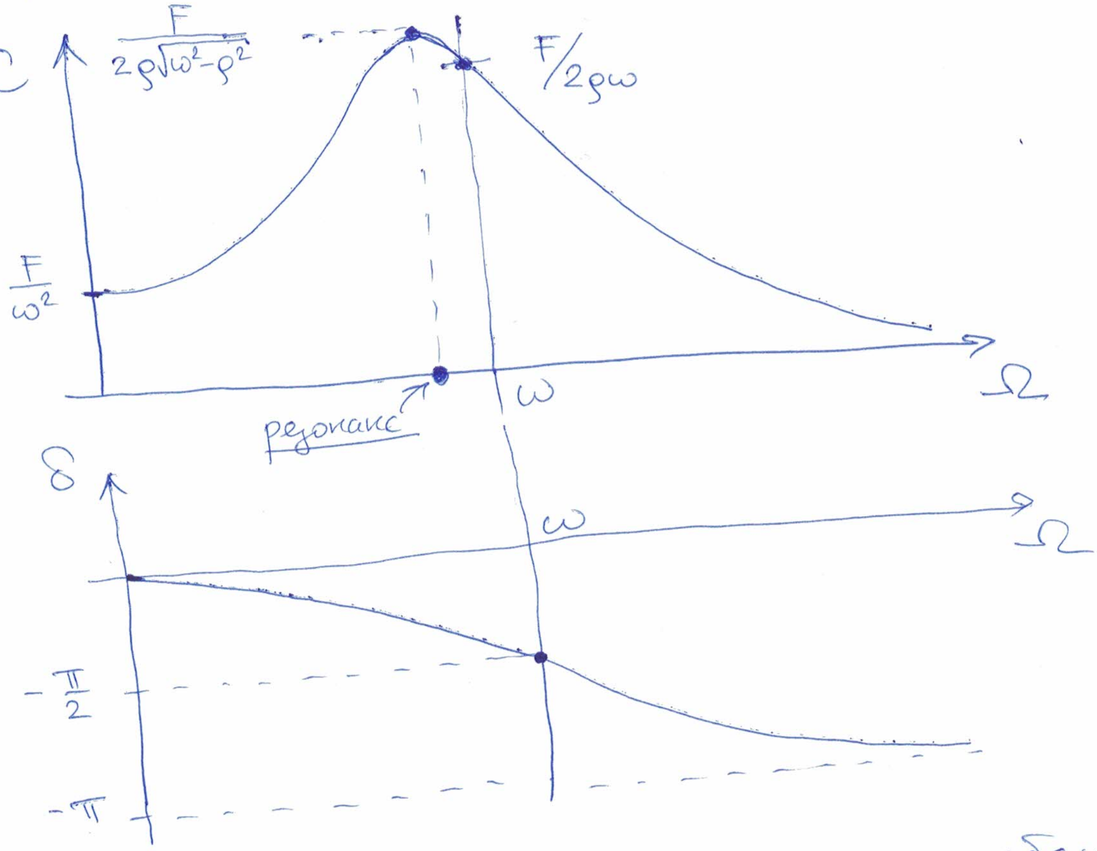
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C\{(\omega^2 - \Omega^2)\cos\delta - 2\rho\Omega\sin\delta\} = F \\ (\omega^2 - \Omega^2)\sin\delta + 2\rho\Omega\cos\delta = 0 \end{cases}$$

Откуда находим:

$$\boxed{\begin{gathered} C = \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\rho^2\Omega^2}} \\ \operatorname{tg}\delta = -\frac{2\rho\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \end{gathered}}$$

Нарисуем графики амплитуды C и фазы δ частного колебания (5) в зависимости от частоты Ω внешней силы.

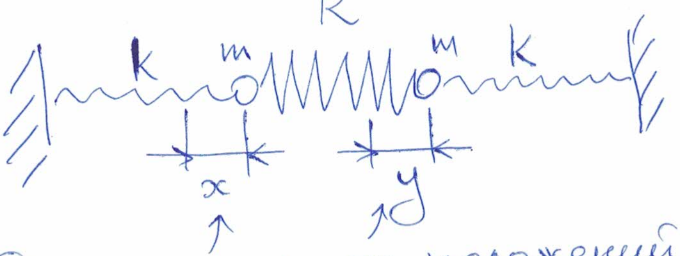


Видно, что максимум амплитуды колебаний достигается при Ω — немного меньше ω.

Амплитуда — конечная потому, что получаемая от внешней силы энергия рассеивается в среде из-за трения.

Колебания по фазе всё время отстают от колебаний внешней силы $F \sin \Omega t$: $\delta < 0$.

6 Ещё пример пары взаимодействующих осцилляторов.



Отклонения от положений равновесия

Уравнения Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - R(x-y) \\ m\ddot{y} = R(x-y) - ky \end{cases}$$

Они же в 2-векторном виде:

$$\boxed{\ddot{X} = -AX, \text{ где } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} k+R & -R \\ -R & k+R \end{bmatrix}} \qquad (7)$$

Характеристический многочлен для A факторизуется:

$$\lambda^2 - \frac{2(k+R)}{m}\lambda + \frac{k(k+2R)}{m^2} = \left(\lambda - \frac{k}{m}\right)\left(\lambda - \frac{k+2R}{m}\right)$$

Собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{k+2R}{m}$$

Соответствующие собственные векторы:

$$(A - \lambda_1 E)\psi_1 = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} R & -R \\ -R & R \end{bmatrix}\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E)\psi_2 = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} -R & -R \\ -R & -R \end{bmatrix}\psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ψ_1 и ψ_2 образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Общее решение (7) ищем в виде

$$\boxed{X(t) = \alpha_1(t)\psi_1 + \alpha_2(t)\psi_2}.$$

На $\alpha_{1,2}$ получаются уравнения

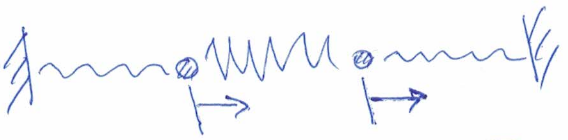
$$\ddot{\alpha}_i = -\lambda_i \alpha_i$$

с очевидным решением

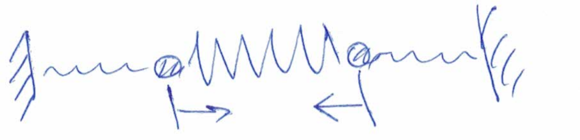
$$\boxed{\alpha_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)}$$

где $\omega_i^2 = \lambda_i$, A_i, B_i — 4 произвольных констант.

Решения $\psi_i \cos(\omega_i t)$, $\psi_i \sin(\omega_i t)$, $i = 1, 2$ являются <u>ФСР</u> однородной системы диффуров (7). В механике они называются <u>нормальными модами колебаний</u> системы

Норм. мода $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:  , $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Это синхронное колебание двух частиц с <u>одинаковой</u> амплитудой. Пружина R не растянута

Норм. мода $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2R}{m}}$:  $\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Это колебание частиц в противофазе с <u>одинаковой</u> амплитудой.

Общее решение системы (7)

$$X_{\text{общ.}}(t) = \begin{pmatrix} A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Параметры A, B, $\varphi_{1,2}$ фиксируются значениями начальных координат и скоростей частиц.

Рассмотрим решение с $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot X(0) = 0$, т.е. в начальный момент отклонили левую частицу на x_0 и отпустили.

$$\dot X(0) = 0 \iff \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B = \frac{x_0}{2}$$

$$X(t) = \frac{x_0}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t \\ \cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t \end{pmatrix}$$

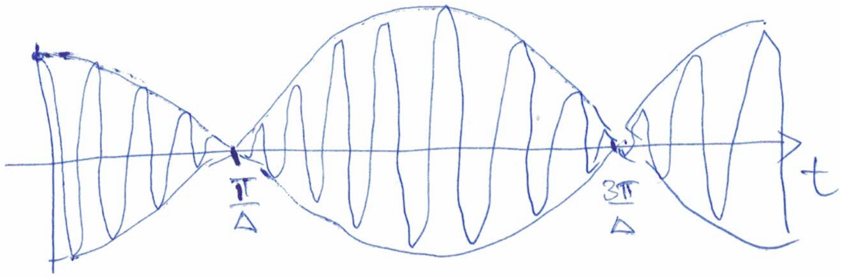
Переобозначим $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ $\Delta = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$:

$$X(t) = x_0\begin{pmatrix} \cos\Delta t\ \cos\omega t \\ \sin\Delta t\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

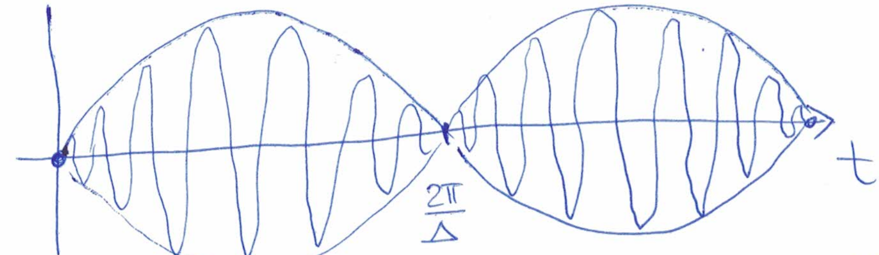
Если $R \ll k$, то $\Delta \ll \omega$

Картина колебаний частиц выглядит так:

частица 1



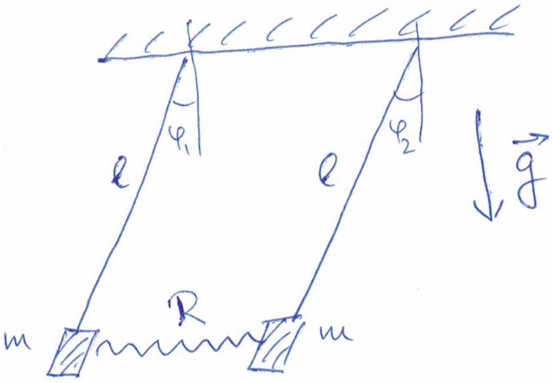
частица 2



То есть, когда частица 1 имеет максимальную амплитуду колебаний ($t=0$, $t=2\pi, \dots$) то частица 2 стоит, и наоборот.

Такая картина движений называется биениями: энергия перекачивается полностью туда-сюда между 2-мя частицами.

Биения просто наблюдать в системе симпатических маятников



При малых углах отклонения φ_1, φ_2 движения системы почти гармонические.

Роль жестких пружин k тут играет сила тяжести.