Введение в теорию интегральных уравнений. Листок 1.

Срок сдачи – 11 февраля.

1. Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных уравнений

$$\text{a) } \varphi(x) = \lambda\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}, \qquad \varphi(x) = \frac{x+2/3x^3}{(1+x^2)^2} + \xi\int\limits_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\varphi(t)dt,$$

$$\text{b) } \varphi(x) = \alpha + \beta\sin x, \qquad \varphi(x) - \lambda\int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt = 1,$$

$$\text{c) } \varphi(x) = \alpha x + \beta x^3, \qquad \varphi(x) = x + \gamma\int\limits_0^x \sinh(x-t)\varphi(t)dt.$$

2. Решить интегральные уравнения:

$$a)\ \varphi(x) - \lambda\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)dt = \mu\sin x, \qquad b)\ \varphi(x) = x + \int\limits_0^x xt\varphi(t)dt,$$

$$c)\ \varphi(x) + 2\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt = 2xe^x, \qquad d)\ \varphi(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi(t)dt.$$

Метод последовательных приближений. Этот метод заключается в том, чтобы в интегральном уравнении второго рода последовательно выражать левую часть через правую

$$\varphi_n(x) = \psi(x) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

начиная с некоторой пробной функции $\varphi_0(t)$.

3. Найти методом последовательных приближений решения интегральных уравнений, начиная с $\varphi_0(x) = 0$:

$$a)\ \varphi(x) = 2(x+1) - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \qquad b)\ \varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt,$$

$$c)\ \varphi(x) = 1 + \int\limits_0^1 xt^2\varphi(t)dt, \qquad d)\ \varphi(x) = x + \int\limits_0^1 x^2t^2\varphi(t)dt.$$