Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Лекция 1. Предварительные сведения

На протяжении всего курса мы не будем различать *римановы поверхности* и *комплексные кривые*. В свою очередь, *компактные* римановы поверхности не отличаются от комплексных *гладких алгебраических* кривых.

Литература:

Основная:

М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей, М., МЦНМО, 2019

Дополнительная:

Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, Глава 2

С. М. Львовский, Введение в римановы поверхности, `https://math.hse.ru/spec-riman`

А.К.Звонкин, С.К.Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М. МЦНМО, 2010

Лекция 1. Предварительные сведения: Поверхности

С точки зрения топологии компактная риманова поверхность представляет собой двумерную ориентируемую поверхность. Все такие поверхности — это сфера S^2, тор $T^2 = S^1 \times S^1$, и т.д. Поверхность в этом списке однозначно задается натуральным числом — своим *родом* g.

Всякая некомпактная риманова поверхность получается вырезанием некоторого замкнутого подмножества из компактной.

Лекция 1. Предварительные сведения: Склеивание поверхностей из многоугольников

Внутренность всякого многоугольника является поверхностью. Склеивая ориентированные многоугольники по сторонам (так, чтобы *всякая сторона многоугольника склеилась ровно с одной стороной того же или другого многоугольника*), мы получаем новые поверхности. При этом надо следить, чтобы склеенная поверхность оставалась ориентируемой, т.е. чтобы из нее нельзя было вырезать ленту Мебиуса. Она будет и ориентированной — ориентация многоугольников задает ориентацию поверхности.

Наоборот, всякую поверхность можно разрезать на многоугольники. Причем это можно сделать бесконечным числом различных способов.

Лекция 1. Предварительные сведения: Склеивание поверхностей с краем из многоугольников

Если включать в пары не все стороны склеиваемых многоугольников, а только некоторые из них, то получится *ориентированная двумерная поверхность с краем*. *Край* поверхности образуют те стороны многоугольников, которые не попали в пары. Край представляет собой несвязное объединение нескольких окружностей.

Лекция 1. Предварительные сведения: Эйлерова характеристика поверхности

Склеивая данную поверхность из многоугольников, мы можем использовать разное количество многоугольников, а также многоугольники с различным числом сторон. Стороны склеиваемых многогугольников образуют граф на поверхности; вершинами этого графа являются отождествленные вершины многоугольников. Обозначим количество многоугольников через F, количество вершин полученного графа через V и количество его ребер через E. Тогда справедливо следующее утверждение:

Theorem

Величина $V - E + F$ не зависит от способа разрезания поверхности на многоугольники. Для поверхности рода g эта величина равна $2 - 2g$.

Величина $V - E + F = 2 - 2g$ называется *эйлеровой характеристикой* данной поверхности.

Лекция 1. Предварительные сведения: Аддитивность эйлеровой характеристики

Будучи равной $2-2g$, эйлерова характеристика поверхности тесно связана с ее родом, который кажется более простой характеристикой поверхности. Однако она во многих отношениях удобнее рода: во-первых, эйлерову характеристику легко определить для любой поверхности, в том числе некомпактной или с краем, во-вторых, она аддитивна: $\chi(M\sqcup N)=\chi(M)+\chi(N)$ для несвязного объединения любых двух поверхностей (и не только поверхностей, а и для любого *симплициального комплекса*).

Например, если из поверхности выкинуть n точек (или n дисков), то ее эйлерова характеристика уменьшится на n (поскольку эйлерова характеристика точки или диска равна 1).

Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов совпадают.

Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение двух поверхностей. Отображение f называется *накрытием степени* d, если у каждой точки $y \in N$ есть окрестность $U(y) \subset N$, гомеоморфная диску D^2, полный прообраз которой $f^{-1}(U(y))$ гомеоморфен несвязному объединению d дисков D^2, причем ограничение f на каждый из этих дисков является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Здесь d может быть натуральным числом или бесконечностью (если у каждой точки в N бесконечно много прообразов).

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \ldots,$ проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Типичный пример накрытия дается отображением $z \mapsto z^d, d = 1, 2, \dots,$ проколотого в нуле единичного диска D' в себя. Степень этого отображения равна d. Всякое *голоморфное* отображение комплексных кривых имеет такой вид в подходящих локальных координатах, что и устанавливает прямую связь между голоморфными отображениями и накрытиями.

Выберем на данной поверхности N базисную точку $y_0 \in N$. Накрытия $(M, x_0) \to (N, y_0)$ поверхности N с базисной точкой y_0 (рассматриваемые с точностью до гомеоморфизма поверхности (M, y_0)) находятся во взаимно-однозначном соответствии с подгруппами фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$

Задача. Опишите все накрытия двумерной сферы.

Предыдущая задача показывает, что у поверхности может быть совсем мало накрытий. В то же время, отображение $z \mapsto z^d$ является голоморфным отображением единичного диска в себя, но не накрытием единичного диска. Поэтому для работы с голоморфными отображениями больше подходят разветвленные накрытия.

Непрерывное отображение компактных ориентированных поверхностей $f : N \to M$ называется *разветвленным накрытием* степени d, если в M можно выкинуть конечный набор точек $\{y_1, \dots, y_n\}$ так, что над дополнением к этому набору отображение $f : (N \setminus f^{-1}(\{y_1, \dots, y_n\})) \to (M \setminus \{y_1, \dots, y_n\})$ становится накрытием степени d.

В частности, отображение $z \mapsto z^d$ является разветвленным накрытием единичного диска степени d.

Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; кратность прообраза

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d. Набор точек $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ называется набором *точек ветвления*, если над дополнением к нему f является накрытием, а над дополнением к любому его подмножеству — нет.
У каждой точки ветвления y_i меньше, чем d прообразов при f; у каждой из остальных точек поверхности M ровно d прообразов. У каждого прообраза $x \in f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in M$ есть *кратность* — число прообразов точки y', близкой к y, лежащих вблизи x. В окрестности точки кратности d_j можно выбрать комплексную координату z так, что в окрестности ее образа есть комплексная координата, в которой отображение f имеет вид $z \mapsto z^{d_j}$. Сумма кратностей прообразов любой точки равна d.

Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; формула Римана–Гурвица

Пусть $f : N \to M$ — разветвленное накрытие степени d, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset M$ — набор его точек ветвления, и пусть $m_i = |f^{-1}(y_i)|$ — количество прообразов точки y_i.

Theorem (формула Римана–Гурвица)

Эйлерова характеристика поверхности N выражается следующей формулой:

$$\chi(N) = d(\chi(M) - n) + \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Лекция 1. Предварительные сведения: Разветвленные накрытия; монодромия

Пусть $f : N \to M$ — накрытие степени d, $y_0 \in M$. Всякая непрерывная петля в M с началом и концом в y_0 определяет перестановку множества точек прообраза $f^{-1}(y_0)$, т.е. перестановку множества из d элементов. Эта перестановка зависит только от гомотопического класса петли и называется *монодромией* пути. Определенный таким образом гомоморфизм $\pi_1(M, y_0) \to S_d$ называется *гомоморфизмом монодромии*, а его образ — *группой монодромии* накрытия. Для разветвленного накрытия монодромия определяется как монодромия соответствующего ему неразветвленного накрытия. Накрывающая поверхность является *связной*, если и только если группа монодромии действует на слое *транзитивно*, т.е. если для любых двух прообразов точки y_0 есть перестановка монодромии, переводящая одну из них в другую.

В частном случае, когда $M \equiv S^2$, монодромия разветвленного накрытия $f : N \to S^2$ полностью определяется набором перестановок прообраза $f^{-1}(y_0)$ точки $y_0 \in S^2$, не являющейся точкой ветвления, задаваемых путями, идущими из точки y_0 в точки ветвления $y_1, \dots, y_n$. Этот набор перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ может быть любым — с единственным ограничением $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \cdots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}$.

Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого рода дают склейки многоугольников на рисунке?

Семинар 1. Задачи

- Поверхность какого максимального рода можно получить, склеивая многоугольники на рисунке?

Семинар 1. Задачи

- Докажите, что тор можно накрыть только тором. Опишите все конечнократные накрытия тора тором.
- Пусть компактная поверхность рода $g > 1$ накрыта поверхностью рода h со степенью $d > 0$. Выразите h через g и d.
- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия двумерной сферы с двумя точками ветвления.

Семинар 1. Задачи

- Перечислите все конечнократные разветвленные накрытия тора с одной точкой ветвления.
- Пусть $f : S^2 \to S^2$ — разветвленное накрытие, заданное в комплексной координате z на S^2 формулой $f(z) = z^4 + 4z^2 + 5$. Какие у него точки ведтвления? Каков порядок точек ветвления?