

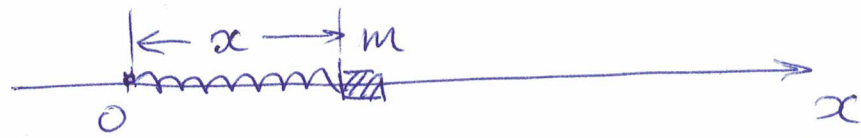
Семинар 3

1

Тренируемся в построении фазовых портретов для систем с одной степенью свободы.

Пример 1 Гармонический осциллятор -

это грузик m на пружинке с идеальной силой упругости $F_{\text{упр.}} = -kx$, k - коэффициент упругости



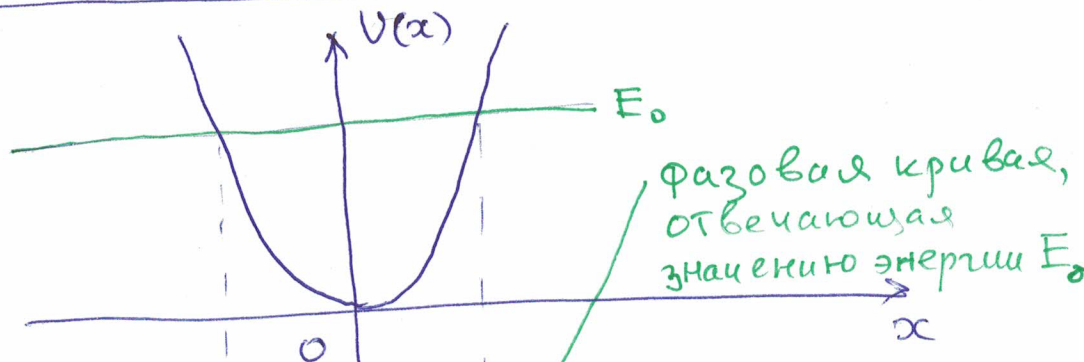
Потенциальная энергия силы упругости:

$$V(x) = -\int F_{\text{упр.}}(x) dx = \frac{kx^2}{2}$$

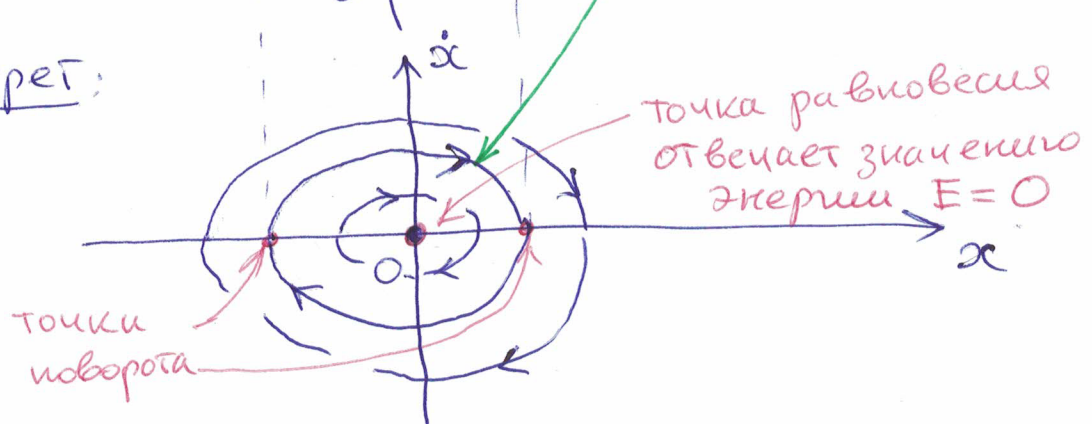
Закон сохранения энергии имеет вид:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

График $V(x)$:



Фазовый портрет:



Удобно рисовать фазовый портрет под графиком потенциальной энергии $U(x)$ (см. рис. вверху) (2)

Комментарии к рисунку:

1) Точка покоя $x=0$ и $\dot{x}=0$ отвечает точке минимума потенциальной энергии:

$$U'(0) = 0 \quad U''(0) > 0$$

Это особая точка фазового портрета типа "центр".

Эта точка — отдельная фазовая траектория.

2) Остальные фазовые кривые — эллипсы

$$\text{const} = E_0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Точки $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ на этих фазовых кривых являются точками поворота ($U(x_{1,2}) = E_0$)

3) Каждая фазовая кривая имеет свои минимум и максимум $\dot{x}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{E_0}{2m}}$ в точке $x=0$ минимума потенциальной энергии $U(x)$

4) Точное общее решение уравнения движения гармонического осциллятора $m\ddot{x} = -Fx$ имеет вид:

$$x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \varphi_0\right)$$

Здесь φ_0 и $X_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ определяются началь-

ными данными задачи. Период обращения (3) по фазовой кривой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}, \quad (*)$$

что согласуется с общей теорией (см. стр 5 лекций). В случае произвольного потенциала $U(x)$

в окрестности его минимума x_0 : $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$, формула (*) выполняется приближённо. Докажем её.

Пусть $x = x_0 + \Delta x$ — точка в малой окрестности x_0 . Движение происходит по фазовой кривой отвечающей значению энергии $E = U(x_0) + \Delta E$ некоего большего $U(x_0)$. В терминах переменной Δx закон сохранения энергии системы имеет вид:

$$U(x_0 + \Delta x) + \frac{m \dot{\Delta x}^2}{2} = E = U(x_0) + \Delta E$$

Разлагая $U(x)$ в окрестности x_0 до 2 порядка по Δx имеем:

$$\frac{U''(x_0) \Delta x^2}{2} + \frac{m \dot{\Delta x}^2}{2} = \Delta E + o((\Delta x)^2)$$

Приближённое решение этого диффура:

$$\Delta x(t) \cong X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}} t + \varphi_0\right),$$

откуда имеем

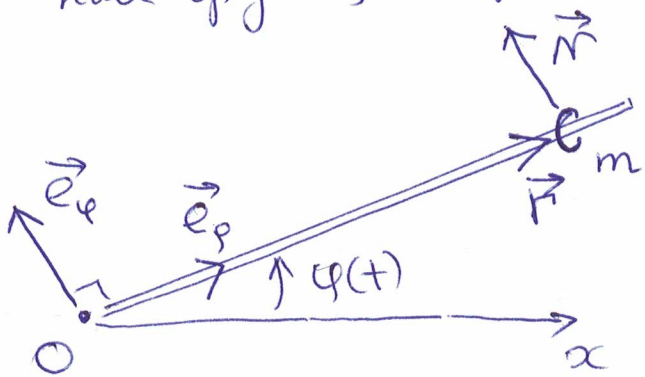
$$T \cong \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

Пример 2: Гармонический осциллятор

4

"вверх тормашками", то есть система с потенциалом $U(x) \sim -x^2$.

Предъявим физическую реализацию этой системы. Это бусинка на вращающемся в плоскости жестком, невесомом, гладком (нет трения) стержне. Стержень закреплен в начале координат ИСО (инерциальной системы отсчета), вращается под действием внешней силы. Угол поворота стержня — известная функция времени $\varphi(t)$. Масса бусинки — m .



Уравнение Ньютона для бусинки

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{N},$$

где \vec{N} — сила реакции стержня, $\vec{N} \perp \vec{r}$ (трения нет).

Удобно уравнение Ньютона переписать в полярной системе координат:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho, \quad \vec{N} = N \cdot \vec{e}_\varphi,$$

где ρ и N — величины векторов \vec{r} и \vec{N} .

Вычисляем: $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

Уравнения Ньютона в полярных координатах; (5)

$$\vec{e}_r: m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0$$

$$\vec{e}_\varphi: m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = N$$

Первое уравнение служит для определения закона движения бусинки по стержню: $r(t)$ ($\varphi(t)$ нам известна).

Второе уравнение позволяет затем вычислить силу реакции стержня $N(t)$.

Бусинка движется по закону:

$$\boxed{\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2}$$

Если теперь возвать закон равномерного вращения стержня $\varphi = \omega t$, то

$$\boxed{\ddot{r} = \omega^2 r}$$

Потенциальная энергия этой силы $U(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$.

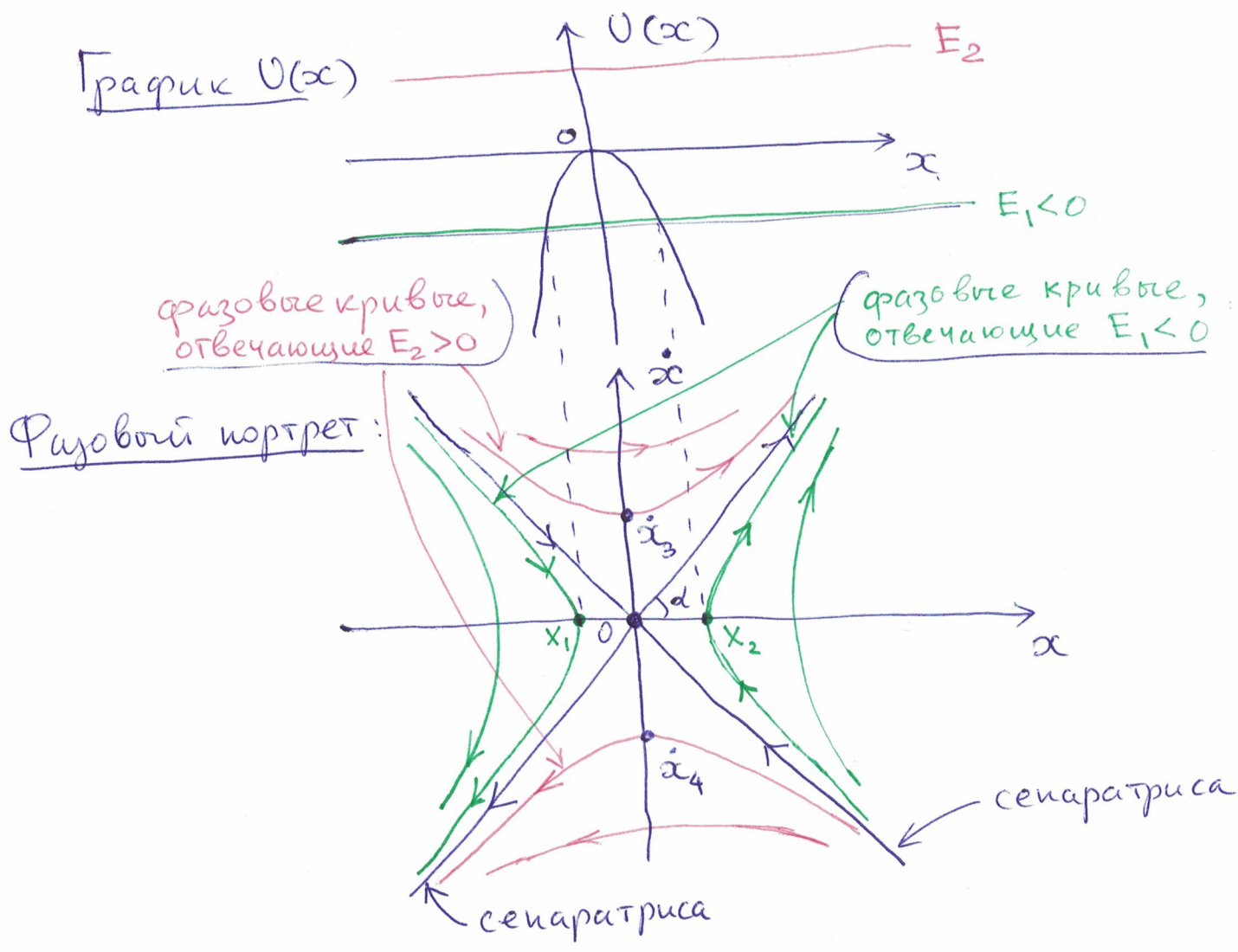
Это и есть осциллятор "вверх тормашками".

Закон сохранения энергии в этой системе имеет вид

$$\boxed{E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2}}$$

тут мы заменили обозначение переменной $r \rightarrow x$.

Фазовый портрет системы:



Комментарий к фазовому портрету

1) При энергии $E = 0$ движение системы происходит по сепаратрисам

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{m} x} \quad (**)$$

Точка неустойчивого равновесия $x = 0$ (локальный максимум $U(x)$), $\dot{x} = 0$, лежит в перекрестье сепаратрис.

Она сама является фазовой траекторией.

И она разбивает сепаратрисы на компоненты связности — 4 луга. Это — еще 4 фазовых траектории. С одной на другую "перепрыгнуть"

нельзя. Въехать по луку в точку неустой- (7)
чивого равновесия $x = \dot{x} = 0$ за конечное время
нельзя. Всего имеем 5 разных фазовых
траекторий, отвечающих значению энергии
 $E = 0$.

2) При энергии $E_1 < 0$ движение системы
происходит по гиперболе (см. рис.). Таких
гипербол — 2 штуки. Каждая из гипербол имеет
точку поворота $x_{1,2}$: $V(x_{1,2}) = E_1$. Движение по
каждой фазовой кривой происходит на полуинтервале
 $x < x_1$ ($x > x_2$).

3) При энергии $E_2 > 0$ движение тоже происхо-
дит по 2-м гиперболам (см. рис.). Однако
это движение не ограничено по переменной x .
Зато у этих двух фазовых кривых есть
точки минимума/максимума — \dot{x}_3/\dot{x}_4 . Этот
экстремум скорости случается ровно над точкой
локального экстремума $x = 0$ потенциальной энер-
гии.

4) Вернёмся к сепаратрисам: из формулы
(**) стр. 6 заключаем, что для угла α их наклона
$$\left| \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{m}} = \pm \sqrt{\frac{-V''(0)}{m}} \right.,$$
 что
согласуется с общей теорией (см. стр. 5 лекции).

Уравнения движения осциллятора "вверх тормашками" решаются легко: (8)

а) Решение для $E > 0$ (не общее)

$$\boxed{x(t) = \pm \sqrt{\frac{m}{\omega^2}} \dot{x}_0 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m}} t\right)}$$

с начальными условиями $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) =$

б) Решение для $E < 0$ (не общее)

$$\boxed{x(t) = \pm x_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{m}} t\right)}$$

с начальными условиями $x(0) = \pm x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

в) Решение для $E = 0$ - сепаратриса

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{\pm \sqrt{\frac{\omega^2}{m}} t}}$$

Как видим, движение по сепаратрисе в бесконечность ($\pm \infty$), либо в точку неустойчивого равновесия ($x=0$) происходит бесконечно долго.

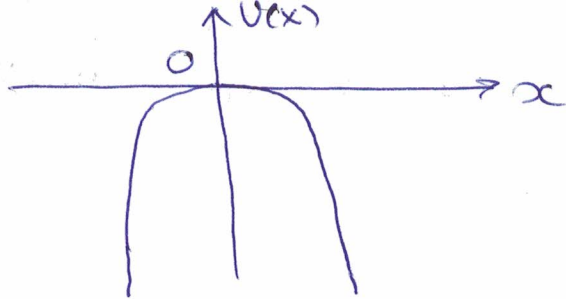
Пример 3 Обсудим "нехороший" случай, когда $U'' = 0$ в точке экстремума. Например

$$U(x) = -x^4$$

Закон сохранения энергии:

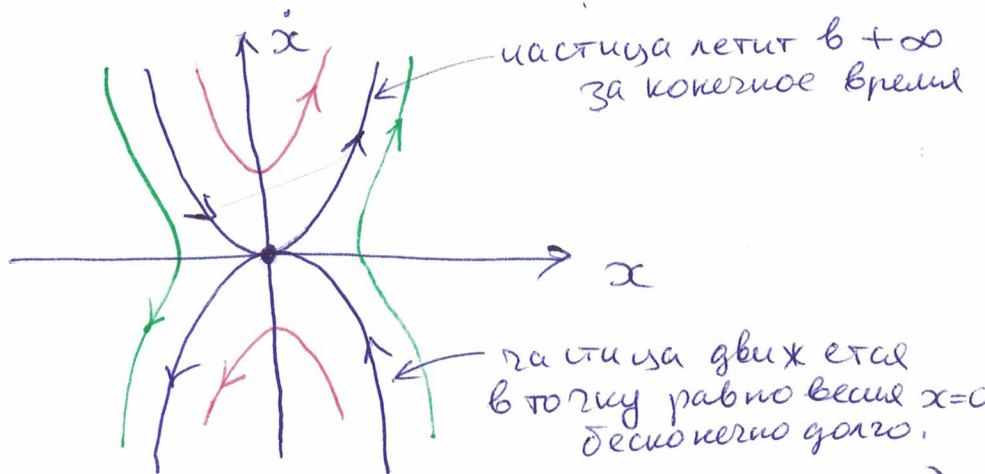
$$\boxed{\frac{m \dot{x}^2}{2} - x^4 = E}$$

График $U(x)$



9

Фазовый портрет:



Особая точка $x = \dot{x} = 0$ (экстремум $U(x)$ при $x=0$)
не классифицируется, поскольку $U''(0) = 0$.

Но задача может быть решена явно.

Сепаратрисы $\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} x^2$ (при $E=0$) —
это параболы. Угол их наклона к оси $O\vec{x}$ в
точке неустойчивого равновесия $x = \dot{x} = 0$ —
нулевой.

Закон движения по сепаратрисе:

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x(0)} \mp \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

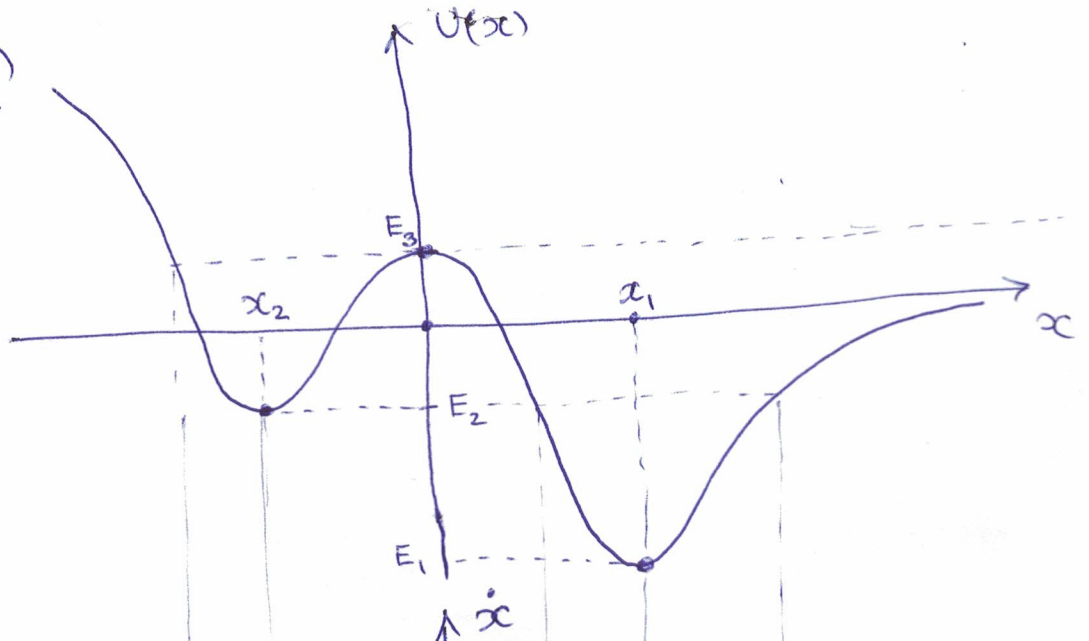
Видно, что за конечное время $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{x(0)}$
частица может уйти на бесконечность

А вот в точку неустойчивого равновесия частица движется всё равно бесконечно долго.

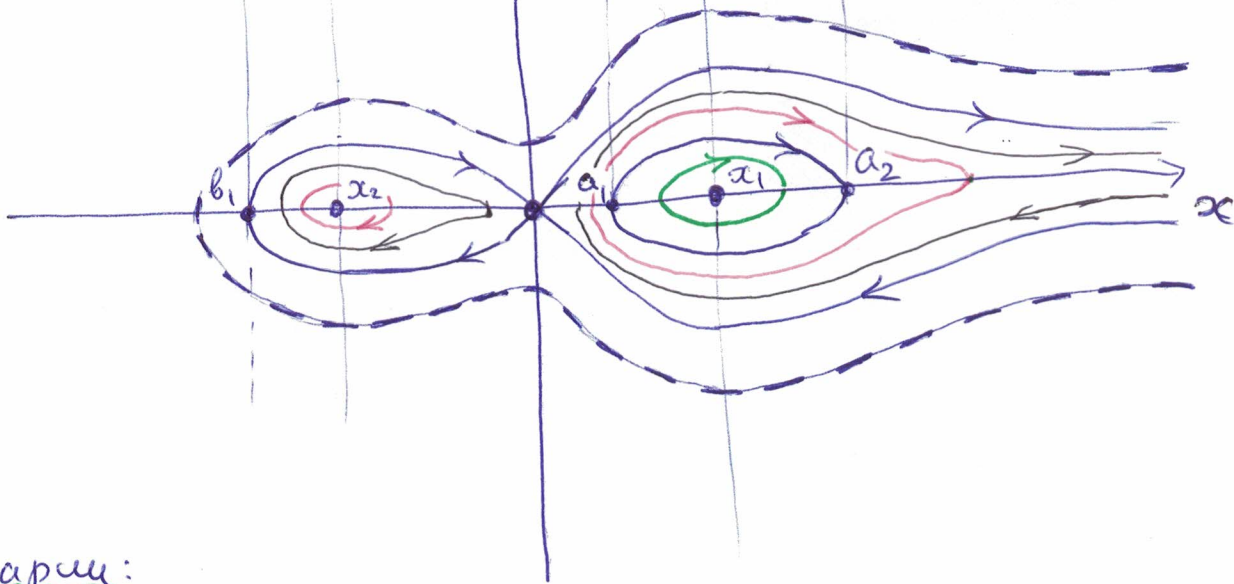
Пример 4 Типичный фазовый портрет.

10

График $U(x)$



Фазовый портрет



Комментарии:

1) $U(x)$ имеет локальные минимумы в т. x_1 и x_2 — это позиции устойчивого равновесия

$E_1 = U(x_1)$ — глобальный минимум $U(x)$. Этому уровню энергии соответствует Δ фазовая траектория — точка устойчивого равновесия в x_1 .

$E_2 = U(x_2)$ — не глобальный минимум. Помимо фазовой траектории — точки устойчивого равновесия в x_2 , этому уровню энергии соответствует еще

Замкнутая фазовая траектория, окружающая точку равновесия x_1 . Это — кривая с точками поворота a_1 и a_2 .

Всего для E_2 — две фазовых траектории.

2) $U(x)$ имеет локальный максимум при $x=0$
 $U(0) = E_3$. Этому уровню энергии соответствует сепаратриса, имеющая точку поворота b_1 слева и не ограниченная справа.

Точкой неустойчивого равновесия $x = \dot{x} = 0$ сепаратриса делится на 3 компонента связности. Всего для уровня энергии E_3 имеем 4 фазовых траектории (узлы и точку неустойчивого равновесия)

3) При значениях энергии E : $E_1 < E < E_2$ имеем одну замкнутую фазовую траекторию, оборачивающуюся вокруг x_1 (зелёная на портрете)

4) При E : $E_2 < E < 0$ имеем 2 замкнутых фазовых траектории, оборачивающиеся вокруг x_1 и x_2 (красные на портрете)

5) При E : $0 < E < E_3$ правая из этих двух траекторий размыкается и уходит на $+\infty$ по x . Это, т.к. $E=0$ — горизонтальная асимптота графика $U(x)$. Все равно фазовых кривых — 2. (чёрные на портрете).

6) При E : $E > E_3$. две кривых "склеиваются в одну". Она ограничена слева и не ограничена справа. (синяя на портрете со штрихами).