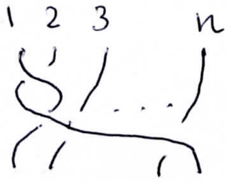
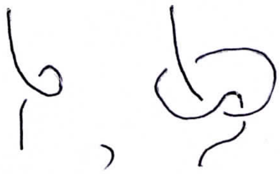
Группа кос

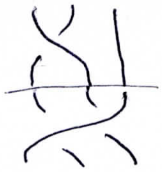
§ 1. Геометрическое представление

Интуитивно n-коса — это набор из n переплетённых между собой пронумерованных нитей. При этом нити не разрешается завязывать в узлы. Примеры:

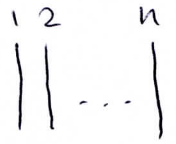
Коса: 

. Не косы:  и т.п.

Умножение двух кос происходит путем "склеивания" верхних и нижних их нитей с одинаковыми номерами.

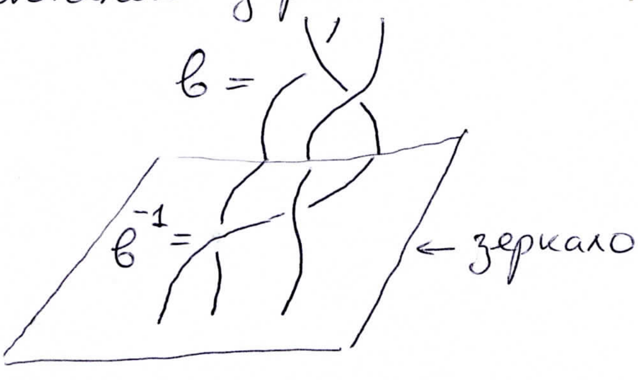
Пример:  ← две косы склеили тут.

Это умножение ассоциативно и обратимо.

Единичная коса: 

.

Обратная коса получается отражением исходной в лежащем горизонтально зеркале:

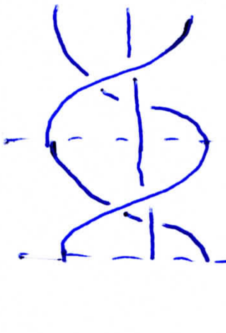


Итак, n-косы образуют группу.

<u>При n=1</u> группа тривиальна

<u>При n=2</u> — это бесконечная циклическая группа.

<u>При n=3</u> — это уже неабелева группа. Имеет нетривиальный центр, порождаемый элементом:

$Z_3 =$ 

— поворот на π

— поворот на 2π

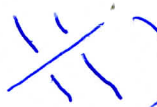
Центр группы 3-кос — бесконечная циклическая группа.

Фактор-группа группы 3-кос по ее центру изоморфна группе $PSL_2(\mathbb{Z})$ преобразований комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида:

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \; : \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ и } ad-bc=1$$

В свою очередь $PSL_2(\mathbb{Z})$ — фактор-группа группы целочисленных 2x2 матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — $SL_2(\mathbb{Z})$ по её центру, порождаемому элементом $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$PSL_2(\mathbb{Z})$ — <u>свободное</u> произведение циклических групп C_2 и C_3, порождаемых элементами

$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (класс косы )

и $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (класс косы )

с соотношениями на них $\boxed{a^3 = b^2 = 1}$

(см. К. Кассель, В. Тураев "Группы кос", МЦНМО 2014, §1.1.4, Прилож. A)

Дадим формально строгое определение группы кос:

Def 1 Конфигурационные пространства

$$P_n := \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall\, i \neq j\}$$

$$B_n := P_n / S_n$$

Здесь S_n – симметрическая группа, которая действует на наборах $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ перестановками компонент.

Иными словами P_n – пространство упорядоченных наборов из n попарно различных точек на плоскости (комплексная структура нам не важна).

B_n – пространство неупорядоченных таких наборов.

Def 2 Классическая группа кос (braid group) – это фундаментальная группа $\pi_1(B_n)$

Группа крашеных кос (pure braid group) – это фундаментальная группа

$$\pi_1(P_n).$$

Поскольку конфигурационные пространства линейно связны, фундаментальные группы одинаковы для всех точек этих многообразий

Нарисуем типичный элемент группы $\pi_1(P_n)$ для точки $(z_1, z_2 \dots, z_n) = (1, 2, \dots, n)$:

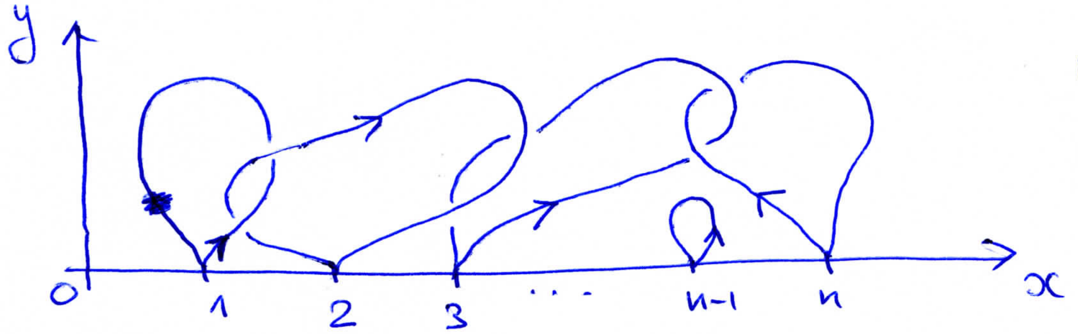
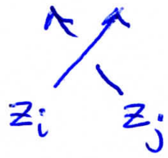


Рис. 1

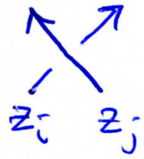
Из каждой точки $i = 1, 2 \dots n$ стартует петля $z_i(t)$: $z_i(0) = z_i(1) = i$. Стрелка на петле указывает направление движения вдоль петли при увеличении t.

Условие $z_i(t) \neq z_j(t)$ $\forall i \neq j$ порождает правило рисования пересечений петель: если $z_i(t_1) = z_j(t_2) = z_0$, то рисуем



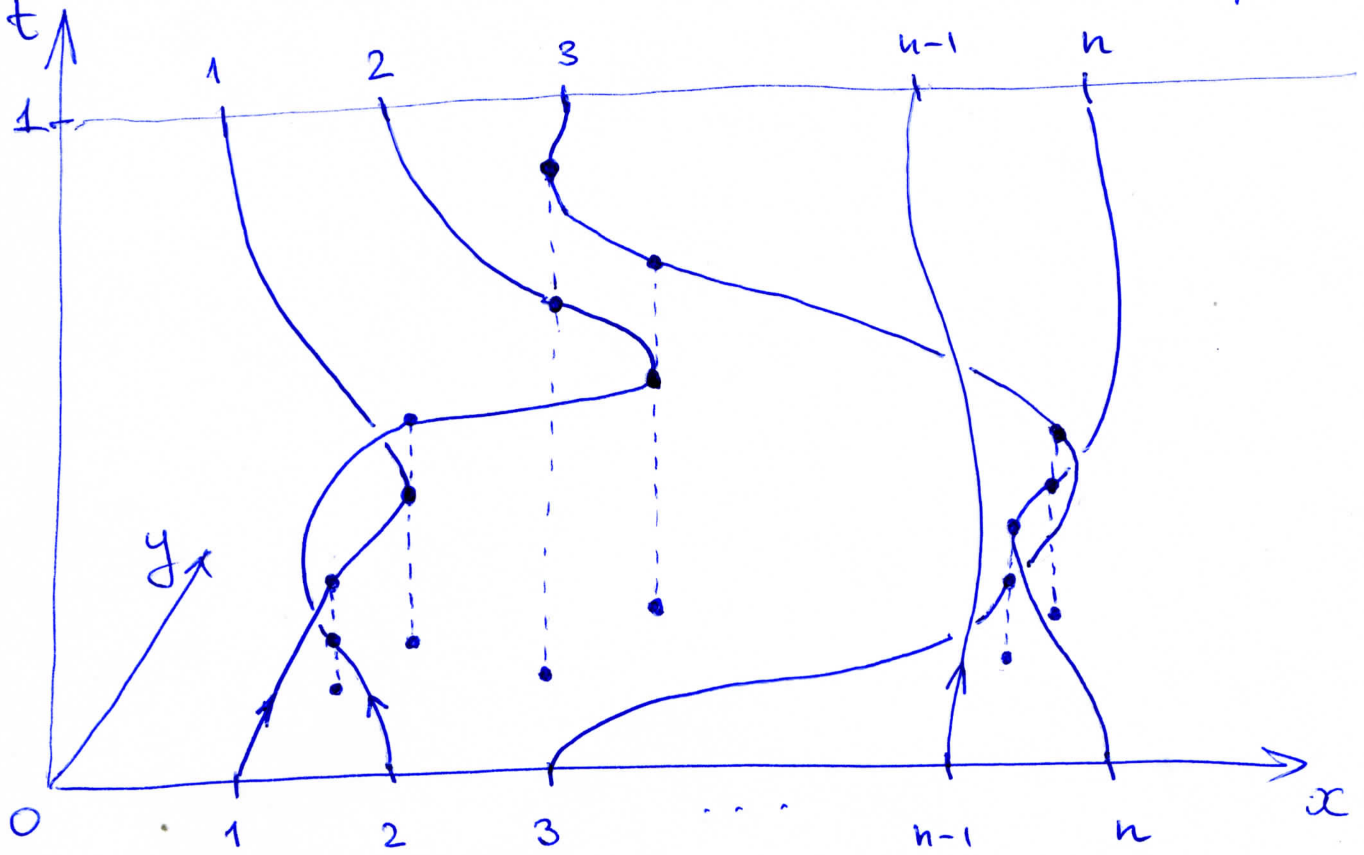
, если $t_1 > t_2$

и



, если $t_1 < t_2$. Более поздняя линия накрывает более раннюю, как если бы мы их рисовали палочками на песке. При этом оказывается, что петли $z_1(t)$ и $z_2(t)$ на Рис. 1 никаким образом нельзя расцепить и стянуть в точку, не нарушив правила $z_1(t) \neq z_2(t)$. Петли $z_2(t)$ и $z_3(t)$ на Рис 1. расцепляются.

Для более наглядного представления картинки зацепления петель представим их в расширенном конфигурационном пространстве. $\mathbb{C}^{\times n} \times \underbrace{[0,1]}_{\text{параметр } t}$:



Получилась, так называемая, <u>крашеная коса</u>. Все её нити начинаются и кончаются в точках с одинаковыми координатами

$$z_i(0) = z_i(1) = i \quad \forall i.$$

Можно считать, что каждая нить этой косы имеет свой особый цвет, и при умножении таких кос склеиваются нити одного цвета.

Для элементов группы $\pi_1(B_n)$ получаются похожие картинки в расширенном конфигурационном пространстве, с одним отличием: нити кос могут начинаться и заканчиваться в разных точках набора $(1, 2, \dots, n)$. Таким образом $\pi_1(B_n)$ — действительно группа классических n-кос.

Rem. Однозначность проекции петель $z_i(t)$ на ось времени t исключает возможность появления картинок вида  или .

Очевидно, группа крашеных кос $\pi_1(P_n)$ является подгруппой $\pi_1(B_n)$. Нетрудно убедиться, что эта подгруппа нормальна.

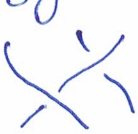
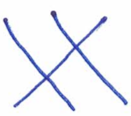
Действительно, всякой косе

$$b = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \in \pi_1(B_n)$$

можно сопоставить элемент группы перестановок S_n:

$$b \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} z_1(0)=1, & z_2(0)=2, & \dots, & z_n(0)=n \\ z_1(1), & z_2(1), & & z_n(1) \end{pmatrix} \in S_n$$

На картинках это сопоставление означает, что мы "забываем" о том, какая нить сверху, а какая снизу при их пересечении:

$b =$  $\mapsto$ $\sigma =$ 

Это сопоставление – гомоморфизм: произведению кос сопоставляется композиция перестановок.

Подгруппа крашеных кос является ядром этого гомоморфизма, и поэтому она нормальна.

Класс смежности косы $b \in \pi_1(B_n)$ по подгруппе крашеных кос взаимнооднозначно соответствует перестановке:

$$[b]_{\pi_1(P_n)} = [(z_1(t), \dots z_n(t))]_{\pi_1(P_n)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix}$$

Таким образом S_n – фактор-группа $\pi_1(B_n)$ по $\pi_1(P_n)$:

$$\boxed{S_n = \pi_1(B_n) / \pi_1(P_n)}$$

Формулу факторизации можно записать в виде короткой <u>точной последовательности групп</u>

$$\boxed{1 \to \pi_1(P_n) \longrightarrow \pi_1(B_n) \xrightarrow{\beta_n^{\text{г.}}} S_n \longrightarrow 1}$$

каноническое вложение подгруппы в группу

Отображение $\beta_n^{\text{г.}}$:

$$\boxed{b = (z_1(t), \dots, z_n(t)) \overset{\beta_n^{\text{г.}}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix}}$$

Мы снабдим индексом г., имея в виду, что оно определено в геометрическом представлении группы кос.

§2 Алгебраическое представление (Emil Artin, 1925)

Рассмотрим набор букв b_i, $i = 1 \ldots n-1$.
Будем считать, что этот набор букв порождает группу.
То есть у каждой b_i есть обратная b_i^{-1} (вообще говоря, это новая буква), и есть единичная буква 1:

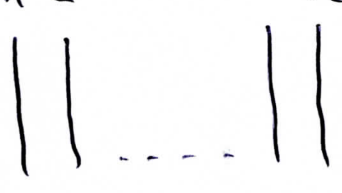
$$b_i b_i^{-1} = b_i^{-1} b_i = 1. \qquad (1)$$

Порождаемая группа содержит всевозможные слова, составленные из букв $b_i^{\pm 1}$. Пока это свободная группа. Нас же интересует более специальная ситуация: мы сопоставим буквам картинки **элементарных зацеплений** из группы кос:

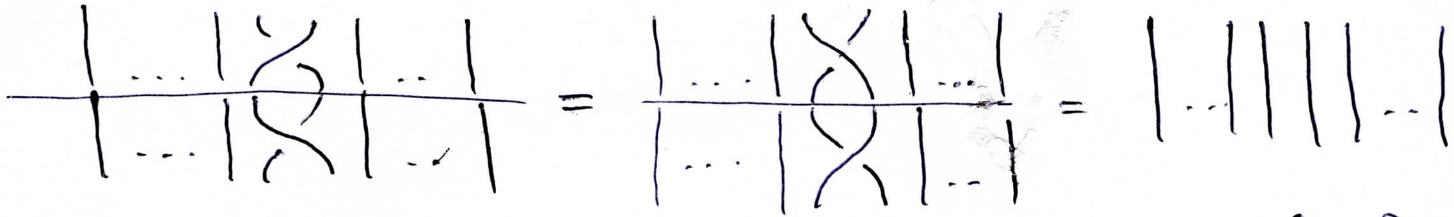
$b_i \longmapsto$ 

$b_i^{-1} \longmapsto$ 

а также

$1 \longmapsto$ 

Такое сопоставление уважает соотношения обратимости (1):



(1a)

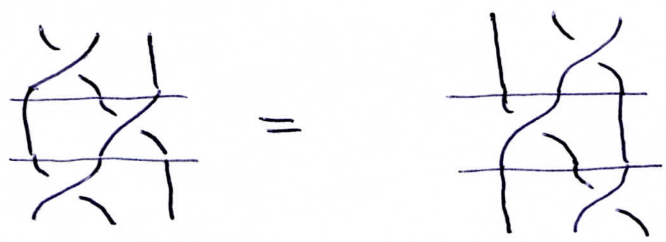
Это сопоставление уважает и другие соотношения, которые мы можем предъявить к буквам b_i:

$$\boxed{\begin{array}{ll} b_i b_j = b_j b_i & \forall\, i,j : |i-j|>1 \\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} & \forall\, i=1,\dots,n-2. \end{array}}$$

(2)

(3)

Картинки, сопоставляемые последним соотношениям выглядят так:



(3a)

Def 3. Группа, порождаемая генераторами $b_i^{\pm 1}$, $i=1,\dots,n-1$, удовлетворяющими соотношениям (1), (2), (3) называется артиновой группой кос. B_n.

Комментарий к этому определению

Задание группы в терминах <u>генераторов</u>, т.е., набора букв: $\{b_1, b_2, \dots\}$, и <u>соотношений</u>, т.е., набора слов составленных из этих букв: $\{\omega_1 = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}, \omega_2, \dots\}$, означает, что мы определяем фактор-группу в <u>свободной группе</u> $F(b_1, b_2, \dots)$, порождённой генераторами $\{b_1, b_2, \dots\}$ по <u>нормальному замыканию</u> набора элементов $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, то есть по нормальной подгруппе, состоящей из всевозможных произведений элементов вида $x_1 \omega_1 x_1^{-1}, x \omega_2 x_2^{-1}, \dots, \forall x_{1,2,\dots} \in F$.

В определении <u>Def 3</u> словами ω являются:

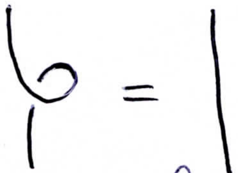
$$\omega_{ij} = b_i b_j b_i^{-1} b_j^{-1} \quad \forall\, i-j>1$$

$$\sigma_i = b_i b_{i+1} b_i b_{i+1}^{-1} b_i^{-1} b_{i+1}^{-1}$$

Заметка Факторизация по их нормальному замыканию приводит к тому, что в фактор-группе образами всех этих элементов будет единица:

$$\omega_{ij} = \sigma_i = 1.$$

Соотношения (3) называются <u>соотноше-ниями кос</u> (braid relations).

<u>Rem.</u> Картинки преобразований эквивалентности кос (1a) и (3a), соответственно, называются движениями Рейдемейстера (Kurt Reidemeister, 1927) 2 и 3 типов. Вместе с движениями 1-го типа:  они позволяют любые две узловые диаграммы, отвечающие одному и тому же узлу, привести к одинаковому виду.

Сопоставление генераторам $b_i^{\pm 1}$ картинок элементарных зацеплений i-й и $(i+1)$-й нитей косы порождает гомоморфизм групп, обозначим его i_n:

$$\boxed{B_n \xrightarrow{i_n} \pi_1(\mathcal{B}_n)}$$

Наша конечная цель в этом разделе: доказать, что i_n — изоморфизм групп.

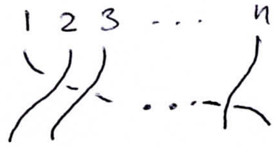
А пока сделаем отступление о различных способах задания B_n в терминах генераторов и соотношений. Число используемых при этом генераторов зависит от выбора способа задания.

Реализация B_n № 2

Определим

п-цикл

$$C_n := b_1 b_2 \dots b_{n-1} \xmapsto{i_n}$$



Нетрудно убедиться, что с помощью этого элемента из элементарного зацепления b_1 можно породить все остальные

$$b_2 = c_n b_1 c_n^{-1}, \dots, \quad b_{i+1} = (c_n)^i \, b_1 \, (c_n)^{-i} \qquad (4)$$

Следовательно: а) все элементарные зацепления b_i в B_n взаимно сопряжены

в) B_n можно породить элементами $b_1^{\pm 1}$ и $C_n^{\pm 1}$.

Реализация B_n № 3

(J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee 1998, Adv. Math. v. 139, p. 322–353)

Определим генераторы заплетения нитей i и j, $i<j$

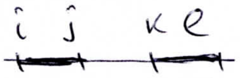
$$\boxed{b_{ij} := (b_{j-1} b_{j-2} \dots b_{i+1})\, b_i \,(b_{j-1} b_{j-2} \dots b_{i+1})^{-1}} \qquad (5)$$

Очевидно $b_{i\,i+1} = b_i$. Картинка для b_{ij}:

$$b_{ij} \xmapsto{i_n}$$

Можно убедиться, что B_n задаётся в терминах генераторов $b_{ij}^{\pm 1}$, $1 \le i < j \le n$, и соотношений

$$\begin{cases} b_{ij}\, b_{kl} = b_{kl}\, b_{ij}, \text{ если } (ij) \text{ и } (kl) \text{ расположены на оси } \mathbb{Z} \text{ как} \\ \boxed{b_{jk}\, b_{ij} = b_{ik}\, b_{jk} = b_{ij}\, b_{ik} \quad \forall\; i<j<k} \end{cases} \qquad (6)$$

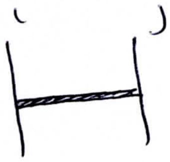


или

картинка для этого элемента имеет вид:

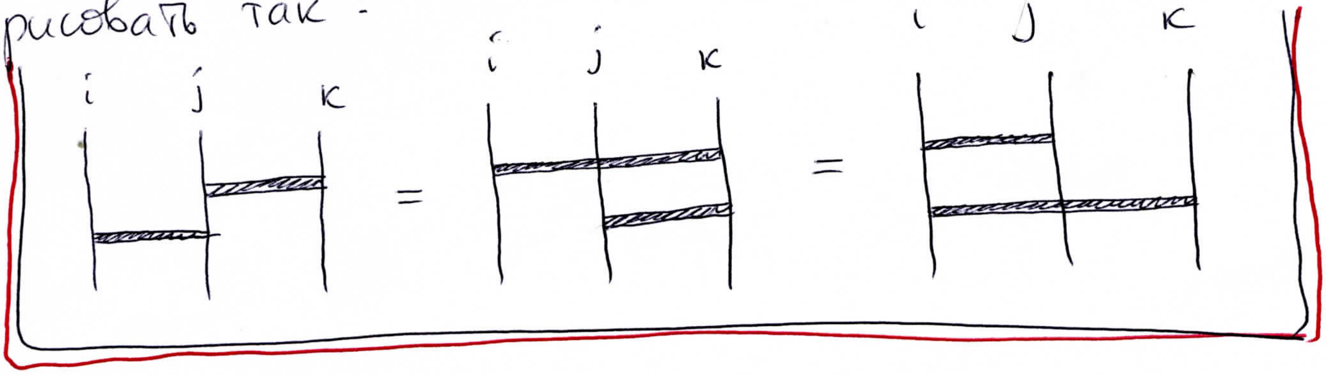
Чтобы не вспоминать всякий раз, как упорядочены i, j и k, можно элемент b_{ij} представить графически:

$b_{ij} =$



,

и тогда нетривиальные соотношения для b_{ij} можно нарисовать так:



(6a)

Rem: Заметим, что соотношения для генераторов b_i (2), (3) лево-право симметричны (т.е. не меняют вида при прочтении справа-налево). Для генераторов b_{ij} это не так. Убедитесь, что формулы

$$b_{ij}\, b_{jk} = b_{jk}\, b_{ik} = b_{ik}\, b_{ij}, \quad i<j<k \quad \underline{\text{неверны}}$$

<u>Почему это так?</u>

Def4: Нормальная подгруппа артиновой группы кос B_n, являющаяся нормальным замыканием набора $b_i^{\pm 2}$, то есть подгруппа $P_n \subset B_n$, порождаемая элементами вида

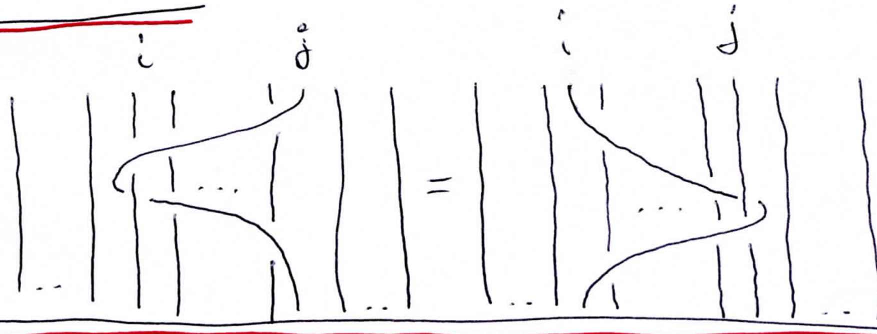
$$x\, b_i^{\pm 2} x^{-1} \quad \forall x \in B_n$$

называется артиновой группой крашеных кос.

Rem: С учетом формул (4) подгруппу P_n можно породить из $b_1^{\pm 2}$.

Из определения (5) элементов b_{ij} следует, что

$$\boxed{A_{ij} := b_{ij}^2 \in P_n} \qquad (7)$$

$A_{ij} \xrightarrow{\;i_n\;}$ 

Лемма 1: Артинова группа крашеных кос P_n порождается набором $A_{ij}^{\pm 1}$, $1 \le i < j \le n$.

Док-во: Для $P_2 \subset B_2$ (абелев случай) всё очевидно.

Первый нетривиальный случай $P_3 \subset B_3$: порождается элементами $x b_1^2 x^{-1} = x A_{12} x^{-1}$, $x b_2^2 x^{-1} = x A_{23} x^{-1}$ и им обратными. Здесь x – слово, составленное из генераторов B_3: $b_1^{\pm 1}$ и $b_2^{\pm 1}$.

Вычислим результат сопряжения A_{12} и A_{23} генераторами $b_1^{\pm 1}$ и $b_2^{\pm 1}$:

Тривиальные соотношения: $b_1^{\pm 1} A_{12} b_1^{\mp 1} = A_{12}$

$$b_2^{\pm 1} A_{23} b_2^{\mp 1} = A_{23}$$

$$b_2 A_{12} b_2^{-1} = A_{13}$$

Чуть сложнее:

$$b_2^{-1} A_{12} b_2 = b_2^{-2} (b_2 A_{12} b_2^{-1}) b_2^2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}$$

Сопряжение, требующие применения соотношение кос:

$$b_1^{-1} A_{23} b_1 = (b_1^{-1} b_2 b_1)^2 = (b_2 b_1 b_2^{-1})^2 = b_2 b_1^2 b_2^{-1} = A_{13}$$

$$b_1 A_{23} b_1^{-1} = (b_1 b_2 b_1^{-1})^2 = (b_2^{-1} b_1 b_2)^2 = b_2^{-1} b_1^2 b_2 = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23}$$

(*) иначе преобразуем

$$b_1^2 (b_1^{-1} A_{23} b_1) b_1^{-2} = A_{12} A_{13} A_{12}^{-1}$$

Видим, что в результате сопряжения A_{12} и A_{23} генераторами $b_{1,2}^{\pm 1}$ возникают, помимо $A_{12}^{\pm 1}$ и $A_{23}^{\pm 1}$ еще и A_{13}. Проверим, к чему приведёт сопряжение A_{13} генераторами:

$\boxed{A_{13} = b_2 b_1^2 b_2^{-1} = b_1^{-1} b_2^2 b_1}$, поэтому

$$b_1 A_{13} b_1^{-1} = A_{23}, \quad b_1^{-1} A_{13} b_1 = A_{12}^{-1} A_{23} A_{12}$$

$$b_2^{-1} A_{13} b_2 = A_{12}, \quad b_2 A_{13} b_2^{-1} = A_{23} A_{12} A_{23}^{-1}.$$

Убедились, что при сопряжении A_{13} новых элементов, помимо $A_{12}^{\pm 1}$, $A_{23}^{\pm 1}$ и A_{13}, не возникло. Заключаем, что все элементы P_3 можно выразить как мономы из $A_{12}^{\pm 1}, A_{23}^{\pm 1}, A_{13}^{\pm 1}$.

В случае P_n, $n > 3$, следует провести аналогичную проверку.

Предлагается проверить самостоятельно формулы:

$$b_1 A_{2k} b_1^{-1} = A_{2k}^{-1} A_{1k} A_{2k},$$

$$\begin{cases} b_1^{-1} A_{2k} b_1 = A_{1k} \iff b_1 A_{1k} b_1^{-1} = A_{2k}, \\ b_1^{-1} A_{1k} b_1 = A_{12}^{-1} A_{2k} A_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_k A_{1k} b_k^{-1} = A_{1k+1} \iff b_k^{-1} A_{1k+1} b_k = A_{1k} \\ b_k^{-1} A_{1k} b_k = A_{kk+1}^{-1} A_{1k+1} A_{kk+1} \\ b_k A_{1k+1} b_k^{-1} = A_{kk+1} A_{1k} A_{kk+1}^{-1} \end{cases} \qquad (8)$$

Сопряжения A_{ij} другими $b_k^{\pm 1}$ очевидны. $\square$

Уже из соотношений (*) на стр 14. видно, что не свободно порождается элементами $A_{ij}^{\pm 1}$. В следующей лемме выводятся соотношения для A_{ij}. Впоследствии выяснится, что эти соотношения задают группу крашеных кос P_n.

Для наглядности условимся вместо произвольного набора упорядоченных индексов i, j, k, l:

$$\boxed{1 \le i < j < k < l \le n}$$

использовать символы: $\boxed{i, j, k, l \to 1, 2, 3, 4}$

Лемма 2 Генераторы A_{ij}, $1 \le i < j \le n$, артиновой группы крашеных кос P_n удовлетворяют соотношениям:

$$A_{12} A_{34} = A_{34} A_{12}, \quad A_{14} A_{23} = A_{23} A_{14},$$

циклическое соотношение:

$$A_{12}A_{13}A_{23} = A_{13}A_{23}A_{12} = A_{23}A_{12}A_{13} \quad (а)$$

$$A_{13}(A_{14}A_{24}A_{34}) = (A_{14}A_{24}A_{34})A_{13} \quad (в)$$

(9)

Соотношения (9а, в) позволяют вычислить сопряжения:

$$A_{12}A_{23}A_{12}^{-1} = (A_{13}A_{23})^{-1}A_{23}(A_{13}A_{23}) \quad (\alpha)$$

$$A_{12}^{-1}A_{23}A_{12} = A_{13}A_{23}A_{13}^{-1} \quad (\beta)$$

$$A_{12}A_{13}A_{12}^{-1} = A_{23}^{-1}A_{13}A_{23} \quad (\gamma)$$

$$A_{12}^{-1}A_{13}A_{12} = (A_{13}A_{23})A_{13}(A_{13}A_{23})^{-1} \quad (\delta)$$

$$A_{13}A_{24}A_{13}^{-1} = (A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})A_{24}(A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})^{-1} \quad (\tau)$$

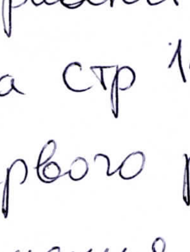
$$A_{13}^{-1}A_{24}A_{13} = (A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})A_{24}(A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})^{-1} \quad (\sigma)$$

(9)

Доказательство:

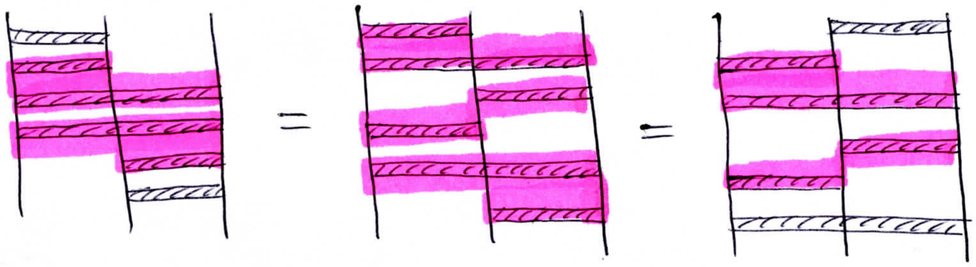
Заметим, что второе равенство в (9а) уже доказано выкладкой (*) на стр 14.

Для доказательства первого равенства (9а) применим графические обозначения для b_{ij} со стр. 12 и формулы (6а). В этих обозначениях

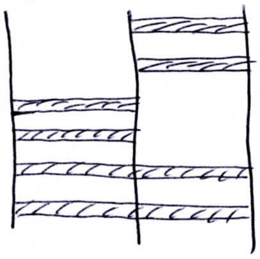
$A_{ij} =$ 

Вычислим:

$A_{12}A_{13}A_{23} =$



$=$



$= A_{23}A_{12}A_{13}$

Соотношения (9в) предлагается проверить с использованием графической <u>техники самостоятельно</u>.

Соотношения (9β), (9γ) выводятся непосредственно из (9а)

Для вывода (9α) удобно (9а) домножить слева на A_{13} и затем преобразовать.

Для вывода (9б) удобно (9а) домножить справа на A_{23} и преобразовать

Для вывода (9τ, σ) используется (9в) и уже выведенные соотношения (9α − б). ▨

<u>Rem 1</u> Из соотношений (9α − σ) следует, что сопряжение элемента A_{ij} элементами $A_{rs}^{\pm 1}$, $r, s < j$, всегда можно заменить сопряжением A_{ij} словом, составленным из элементов вида $A_{*j}^{\pm 1}$.

<u>Rem 2</u> Мы пока <u>не доказали</u>, что P_n задаётся с помощью генераторов A_{ij} и соотношений (9а, в). Нет уверенности, что мы нашли <u>все</u> независимые соотношения для A_{ij}. Это обоснуем позже.

Имея артинову группу кос B_n и её нормальную подгруппу P_n мы можем построить ещё одну короткую точную последовательность:

$$\boxed{1 \longrightarrow P_n \longrightarrow B_n \xrightarrow{\beta_n^{\text{алг.}}} S_n \longrightarrow 1}$$

вложение подгруппы в группу

Здесь $\beta_n^{\text{алг.}}$ – каноническая сюрьекция $B_n \xrightarrow{\beta_n^{\text{алг.}}} B_n/P_n = S_n$:

$$b_i \xmapsto{\beta_n^{\text{алг.}}} \sigma_i$$

Т.к. b_i порождают B_n, то σ_i порождают S_n, причем они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i-j|>1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & \\ \sigma_i^2 = 1 & \end{cases} \qquad (10)$$

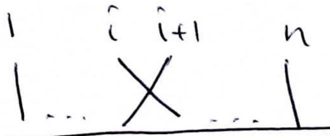
наследуют из B_n

результат факторизации

<u>Def 5</u>: Соотношения (10) задают артиново представление симметрической группы S_n с использованием генераторов элементарных транспозиций σ_i, $i=1\ldots n-1$.

<u>Rem</u>: Еще одно общеупотребительное обозначение для σ_i — $(i, i+1)$.

Отображение

$\sigma_i \overset{j_n}{\longmapsto}$ 

устанавливает, на самом деле, изоморфизм алгебраического и геометрического представлений симметрической группы. Проверив выполнение соотношений (10) для картинок, нетрудно убедиться, что это гомоморфизм групп. Всякой картинке перестановки можно сопоставить композицию элементарных транспозиций σ_i (например, разложив ее на циклы и представив циклы в виде произведений транспозиций). Так что j_n — это сюръекция. Заметив, что n-перестановок всего $n!$, и убедившись, что из σ_i можно построить не более $n!$ различных слов (убедитесь сами), заключаем, что j_n — инъекция.

Следовательно <u>j_n — изоморфизм.</u>

Отображения i_n и j_n связывают две построенные нами короткие точные последовательности в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "i_n|_{P_n}"] & B_n \arrow[r, "\beta_n^{\text{алг}}"] \arrow[d, "i_n"] & S_n \arrow[r] \arrow[d, "j_n"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{P}_n) \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{B}_n) \arrow[r, "\beta_n^{\text{геом}}"] & S_n \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Отсюда, воспользовавшись известной леммой о 5 гомоморфизмах заключаем, что изоморфность отображения i_n следует из изоморфности его ограничения $i_n|_{P_n}$.

Последнее утверждение мы будем доказывать индукцией по n.

Рассмотрим отображение

$$\pi_1(P_n) \xrightarrow{\xi_n^{\text{геом.}}} \pi_1(P_{n-1})$$

заключающееся в удалении последней справа (n-ой) нити крашеной косы. Оно является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма состоит из n-кос, у которых левые $(n-1)$ нити не переплетены между собой, а n-ая нить произвольным образом заплетается между ними. На картинку такой крашеной n-косы удобно взглянуть сверху:

То, что мы видим — это картинка элемента фундаментальной группы плоскости $\mathbb{R}^2$ с выколотыми $(n-1)$ точками. $1, 2, \dots, n-1$

Заметим, что стрелка на рисунке петли $z_n(t)$ показывает направление обхода петли от $t=0$ до $t=1$, и это однозначно задаёт правило наложения компонент петли при пересечении:

Известно, что $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \ldots, n-1\})$ — свободная группа с $(n-1)$ образующими вида:

Построим алгебраический аналог отображения $\xi_n^{\text{геом.}}$.

Строить его будем даже не на P_n, а на группе $\tilde{P}_n$ формально порождаемой генераторами $\tilde{A}_{ij}$, $1 \le i < j \le n$, удовлетворяющими соотношениям (9). Очевидно

$$\boxed{\tilde{P}_n \to P_n : \tilde{A}_{ij} \mapsto A_{ij}} \text{ — это гомоморфизм,}$$

но мы пока не уверены, что это изоморфизм, т.е., что на A_{ij} нет ещё соотношений независимых от (9).

Определим:

$$\tilde{P}_n \xrightarrow{\xi_n^{\text{АЛГ.}}} \tilde{P}_{n-1} : \quad \tilde{A}_{ij} \overset{\xi_n^{\text{АЛГ}}}{\longmapsto} \tilde{A}_{ij}, \text{ если } j < n$$

$$\tilde{A}_{in} \overset{\xi_n^{\text{АЛГ}}}{\longmapsto} 1$$

Нетрудно убедиться, что $\xi_n^{\text{АЛГ.}}$ согласовано с соотношениями (9), то есть $\xi_n^{\text{АЛГ.}}$ — гомоморфизм.

Ядро $\xi_n^{\text{АЛГ.}}$ — нормальное замыкание набора элементов $\{\tilde{A}_{1n}, \tilde{A}_{2n}, \ldots, \tilde{A}_{n-1\,n}\}$ в $\tilde{P}_n$, то есть

Нормальная подгруппа, порожденная элементами вида $x\tilde{A}_{in}^{\pm 1}x^{-1}$, где x — слово из $\tilde{A}_{jk}^{\pm 1}$.

Но из соотношений (9 α–δ) следует, что всякий такой элемент представим в виде слова, составленного из элементов $\tilde{A}_{*n}^{\pm 1}$, то есть ядро $\xi_n^{\text{АЛГ}}$ порождается элементами $\tilde{A}_{in}^{\pm 1}$, $i = 1, \dots n-1$.

Итак, с помощью отображений $\xi_n^{\text{геом}}$ и $\xi_n^{\text{АЛГ}}$ мы получили ещё пару коротких точных последовательностей:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \langle \tilde{A}_{1n}, \tilde{A}_{2n}, \dots, \tilde{A}_{n-1\,n} \rangle & \to & \tilde{P}_n & \xrightarrow{\xi_n^{\text{АЛГ.}}} & \tilde{P}_{n-1} & \to & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_n|_{\tilde{P}_n}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}|_{\tilde{P}_{n-1}}} & & \\
1 & \to & \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}) & \to & \pi_1(\mathcal{P}_n) & \xrightarrow{\xi_n^{\text{геом.}}} & \pi_1(\mathcal{P}_{n-1}) & \to & 1
\end{array}
$$

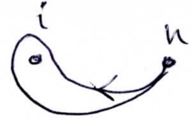
причем их можно организовать в коммутативную диаграмму, как нарисовано выше.

Здесь $i_n|_{\tilde{P}_n} : \tilde{P}_n \to P_n \xrightarrow{i_n|_{P_n}} \pi_1(\mathcal{P}_n)$

$\varkappa_n : \tilde{A}_{in} \mapsto$ 

$\varkappa_n$ — гомоморфизм, поскольку он является ограничением гомоморфизма $i_n|_{\tilde{P}_n}$ с $\tilde{P}_n$ на подгруппу $\langle \tilde{A}_{1n}, \dots, \tilde{A}_{n-1\,n} \rangle$.

$\varkappa_n$ — сюръективен, поскольку в его образе лежат все

генераторы  группы $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{1,\dots,n-1\})$.
Ядро $\varkappa_n$ тривиально, иначе $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{1,\dots,n-1\})$ не была бы свободной группой. Значит $\varkappa_n$ — изоморфизм, а подгруппа $\langle \tilde{A}_{1n},\dots,\tilde{A}_{n-1\,n}\rangle$ свободна и совпадает с $\langle A_{1n},\dots,A_{n-1\,n}\rangle$.

Теперь то, что $i_n|_{\tilde{P}_n}$ — изоморфизм следует индукцией по n с использованием леммы о 5 гомоморфизмах для коммутативной диаграммы со стр. 22.

База индукции: $i_1|_{\tilde{P}_1} = id$, т.к. $\pi_1(\mathcal{P}_1) = \tilde{P}_1 = 1$.

Отсюда, и из того факта, что $\tilde{P}_n \to P_n$ — сюръекция, следует уже, что $i_n|_{P_n}$ — изоморфизм, и $\tilde{P}_n = P_n$.

Подведем итог:

<u>Теорема</u>: Классическая и крашеная группы кос имеют артиновы представления:

$$\boxed{\pi_1(\mathcal{B}_n)\simeq B_n\,,\quad \pi_1(\mathcal{P}_n)\simeq \tilde{P}_n = P_n}$$