Механика 2022

Домашнее задание № 2

Срок сдачи задания **07 февраля 2022**

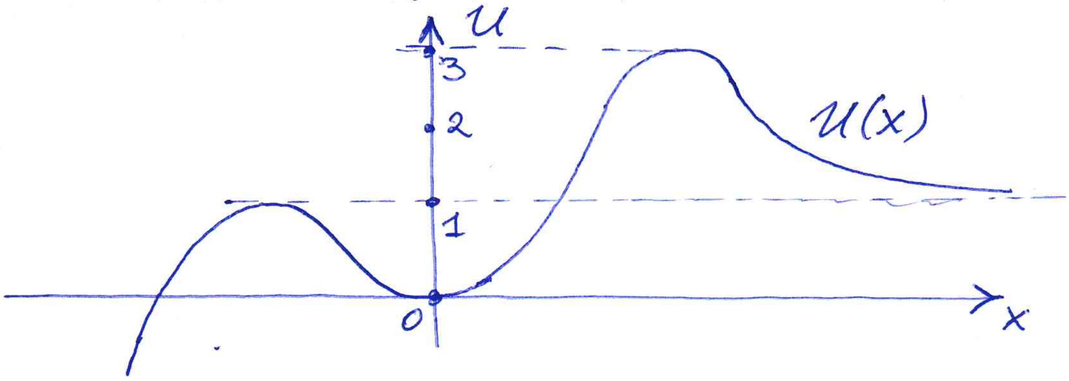
---

**1.** Нарисуйте качественный фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом потенциалом Морса:

$$U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$

Портрет должен содержать все особые точки, сепаратрисы, фазовые кривые во всех типичных областях энергии. На фазовых кривых должны быть расставлены стрелки направления движения.

**2.** Нарисуйте качественный фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом следующим потенциалом:




Определите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии системы $E = 0, 1, 2, 3$.

**3.** Нарисуйте качественный фазовый портрет одномерной массивной частицы, находящейся в силовом поле, задаваемом следующим потенциалом:


Определите число различных фазовых кривых, отвечающих значениям полной механической энергии системы $E = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

**4.** Пользуясь законом сохранения полной механической энергии $E$ при движении одномерной частицы в поле с потенциалом $U(x)$:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = \text{const},$$

уравнение движения частицы можно записать в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - U(x))}.$$

Напишите общее решение этого уравнения в виде функции $t(x, x_0)$ и докажите, что время движения по *сепаратрисе* от любого допустимого начального положения до точки неустойчивого равновесия бесконечно большое. Иными словами, докажите, что двигаясь по сепаратрисе, частица никогда не достигнет положения неустойчивого равновесия.

**5.** (Задача взята из 4 параграфа книги В.И.Арнольда “Математические методы классической механики”). Пусть $S(E)$ — площадь, заключенная внутри *замкнутой* фазовой кривой, отвечающей полной механической энергии $E$. Докажите, что период $T$ движения по этой фазовой кривой частицы массы $m$ равен

$$T = m\frac{dS}{dE}.$$

**6.** На частицу, двигающуюся в пространстве $\mathbb{R}^3$, действует сила $\vec{F}$, компоненты которой в декартовой прямоугольной системе координат даются следующими функциями координат частицы:

$$F_x = yz - x, \qquad F_y = xz - \alpha y, \qquad F_z = \alpha xy + z.$$

Здесь $\alpha$ — вещественный параметр.

а) Найдите значения параметра $\alpha$, при которых сила $\vec{F}$ потенциальна и определите соответствующий потенциал $U(x, y, z)$.

б) Вычислите работу силы $\vec{F}$ (при произвольных значениях $\alpha$) при перемещении частицы вдоль кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$, где:

(*) $\gamma_1$ представляет собой дугу окружности $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$, заключенную между точками $M_1(1, 0, 0)$ и $M_2(0, 1, 0)$.

(**) $\gamma_2$ представляет собой отрезок винтовой линии $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2\phi/\pi$ (здесь $\operatorname{tg}\phi = y/x$ — полярный угол в плоскости $xOy$), заключенный между точками $M_1(1, 0, 0)$ и $M_2(0, 1, 1)$.

**7.** Частица движется вдоль кривой $y = (x^2 - \alpha^2)/2$, расположенной в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. На частицу действует сила упругой невесомой пружины, один конец которой находится в начале координат $(0, 0)$, а второй конец прикреплен к частице. Вектор силы упругости $\vec{F}$ дается выражением

$$\vec{F} = -\kappa\rho\,\vec{e}_\rho, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$\kappa > 0$ — контанта, $\vec{e}_\rho$ — орт полярной системы координат. Найдите работу силы упругости при перемещении частицы из точки с абсциссой $x = 0$ в точку с ординатой $y = 0$.

**8.** На тренировке спортсмен пробегает круг радиуса $R$ с постоянной по модулю скоростью $v$. В момент старта навстречу спортсмену начинает дуть непрерывно усиливающийся ветер. Направление ветра с течением времени не изменяется, а его скорость меняется по закону $V = at^2$, где $a > 0$ — константа, $t$ — время, прошедшее с момента старта бегуна. Сила сопротивления воздуха, действующая на спортсмена, равна

$$\vec{F} = -\kappa\,\vec{u},$$

где $\vec{u}$ — скорость бегуна относительно воздуха. С какой скоростью $v$ должен бежать спортсмен, чтобы минимизировать свою работу по преодолению сопротивления воздуха на дистанции? Работа спортсмена равна по величине и противоположна по знаку работе силы сопротивления воздуха $\vec{F}$.

**9.** Бусинка массы $m$ скользит без трения вдоль прямолинейного стержня, равномерно вращающегося в плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью $\omega$ (см. Пример 2 семинара 3). В начальный момент бусинка находится на расстоянии $\rho(0) = a$ от начала координат, ее начальная радиальная скорость равна нулю: $\rho'(0) = 0$. На бусинку действует только сила реакции стержня $\vec{N}$, направленная вдоль орта полярной системы координат $\vec{e}_\phi$.

а) Найдите зависимость модуля силы реакции стержня от времени $N(t)$ и определите работу, совершенную над бусинкой силой реакции $\vec{N}$ к заданному моменту $T$ от начала движения бусинки.

б) Вычислите изменение кинетической энергии бусинки за тот же промежуток $T$ и сравните его с работой силы $\vec{N}$.