

## Семинар 2.

**Задача 1.** Напишите уравнение квадрики по Штейнеру  $Q$  в  $\mathbb{P}^3$  в подходящей системе проективных координат  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  в  $\mathbb{P}^3$ .

**Задача 2.** Проверьте, что через 3 попарно скрещивающиеся прямые в  $\mathbb{P}^3$  проходит единственная квадрика по Штейнеру.

**Задача 3.** Пользуясь решением задачи 1, ответьте на вопрос, является ли квадрика по Штейнеру невырожденной.

**Задача 4.** Дана невырожденная квадрика  $Q$  над полем  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ ,  $\text{char} \mathbf{k} \neq 2$ . Является ли она квадрикой по Штейнеру?

**Задача 5.** 1) Пусть  $Q$  - квадрика в  $\mathbb{P}^3$ ,  $a \in Q$  и  $\mathbb{T}_a Q$  - объединение всех прямых к  $Q$ , касательных к  $Q$  в точке  $a$ . Докажите, что  $\mathbb{T}_a Q$  - подпространство в  $\mathbb{P}^3$ . Оно называется *касательным пространством к  $Q$  в точке  $a$* .

2) Зная уравнение  $F(x) = 0$  квадрики  $Q$ , где  $F(x) = F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} x_i x_j$  - ненулевая квадратичная форма, напишите уравнение касательного пространства  $\mathbb{T}_a Q$  в точке  $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ .

3) Пусть  $Q$  - квадрика Штейнера и  $a \in Q$ . Покажите, что  $\mathbb{T}_a Q$  - плоскость. Как геометрически построить плоскость  $\mathbb{T}_a Q$ ?

4) Опишите пересечение  $Q \cap \mathbb{T}_a Q$ .