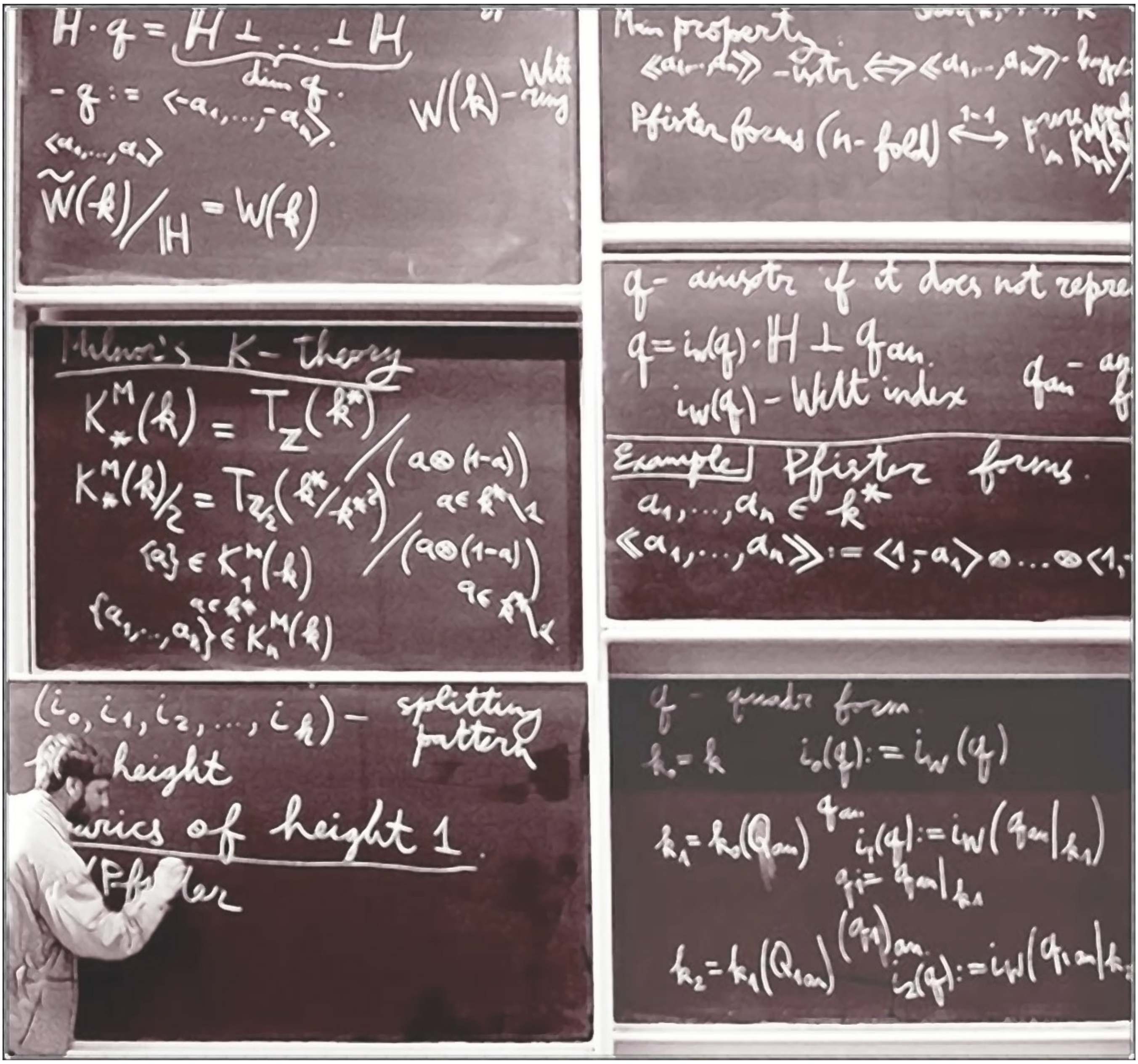
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2020/21 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ



МОСКВА
2020

Содержание

Курсы на выбор студентов

Все курсы формально делятся на «учебные дисциплины» и «научно-исследовательские семинары». Это деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на допустимое число участников курса с одной стороны и число учебных дисциплин[1] с другой. Уточнять ограничения на количества дисциплин и семинаров, которые могут быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «дисциплины» или «семинара» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений и/или докладов участников и вкладе этих видов деятельности в итоговую отметку читайте на странице с описанием курса.

Курсы, имеющие формальный статус «научно-исследовательского семинара», помечены в таблицах аббревиатурой «НИС», напечатанной после фамилии преподавателя. Если такой аббревиатуры нет, курс по умолчанию является «учебной дисциплиной». Пометка типа «2 +» означает, что курс ориентирован[2] на студентов второго года обучения и старше. Английское название курса означает, что он читается на английском языке. У некоторых таких курсов кроме английского описания имеется ещё и русское, к которому ведёт отдельная гиперссылка. **Толстым шрифтом** набраны «толстые» курсы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[3]. Остальные, «тонкие» курсы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита за семестр.

Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[4] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 2–4 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПЕРВОКУРСНИКАМ

ОСЕНЬ

- Основные понятия математики, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский, НИС, 1 +.
- Проективная алгебраическая геометрия, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, НИС, 1 +.
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, НИС, 2 +.
- Школьные олимпиадные задачи, Г. Р. Челноков, НИС, 1 +.
- Графы на поверхностях , Н. Я. Амбург, Б. С. Бычков, НИС, 1 +.
- **Теория кодирования как введение в алгебру и арифметику, В. А. Гриценко, НИС, 1 +.**
- Элементы математической логики, А. В. Кудинов, НИС, 1 +.

ВЕСНА

- Основные понятия математики, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский, НИС, 1 +.
- Проективная алгебраическая геометрия, И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров, НИС, 1 +.
- Геометрия и динамика, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко, НИС, 2 +.
- Школьные олимпиадные задачи, Г. Р. Челноков, НИС, 1 +.
- Числа Гурвица, Б. С. Бычков, Н. Я. Амбург, НИС, 1 +.
- Избранные главы дискретной математики, И. В. Артамкин, НИС, 1 +.
- Геометрия и группы, О. В. Шварцман, НИС, 1 +.
- **Введение в теорию чисел, В. З. Шарич, 1 +.**
- Математика физических явлений, П. И. Арсеев, НИС, 1 +.

[1] В неделю, в семестр, в РУПе, в ИУПе и прочих бумагах и подконтрольных показателях.

[2] По мнению организаторов и академического руководства учебных программ. Это мнение имеет рекомендательный характер и не означает никаких формальных ограничений на выбор данного курса студентами младших курсов.

[3] Если «толстый» курс длится меньше семестра (например один модуль), то он даёт 3 кредита. Обязательные «толстые» семестровые курсы магистратуры, взятые студентами бакалавриата в качестве спецкурсов, дают 5 кредитов.

[4] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ВТОРОКУРСНИКАМ, И «АНТИМАЙНОРЫ»

ОСЕНЬ

◦ Дополнительные главы алгебры, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, В. А. Вологодский, НИС, 2+, модули 1–3, 3 кредита.
◦ **Algebraic Geometry: A Start Up Course, A. S. Tikhomirov, 2+.**
◦ **Введение в алгебраическую топологию, М. Э. Казарян, П. Е. Пушкарь, 2+.**
◦ **Introduction to Galois theory, C. Brav, 2+.**
◦ **Введение в алгебраическую теорию чисел, В. С. Жгун, 2+.**
◦ **Introduction to Functional Analysis, A. Yu. Pirkovskii, 2+.**

ВЕСНА

◦ Elementary Introduction to the Theory of Automorphic Forms, A. M. Levin, НИС, 2+, описание на русском.
◦ **Introduction to Commutative Algebra, A. B. Pavlov, 2+, описание на русском.**
◦ **Введение в римановы поверхности, С. К. Ландо, 2+.**
◦ Character sums, A. B. Kalmynin, НИС, 2+.
◦ **Системы корней и их приложения, К. Г. Куюмжиян, НИС, 2+.**
◦ **Линейное программирование, А. В. Колесников, 2+.**
◦ Основные приложения математики, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский, НИС, 2+.
◦ **Введение в квантовую теорию, В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко, НИС, 2+.**
◦ **Introduction to Frobenius algebras and mirror symmetry, A. A. Basalaev, P. I. Dunin–Barkowski, НИС, 2+, описание на русском.**

Специальные курсы и семинары

Эти занятия предназначены для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 2–4 они набраны прямым шрифтом.

ГОДОВЫЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ СЕМИНАРЫ

ОСЕНЬ

◦ Combinatorics of Vassiliev invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, НИС, 2+.
◦ Representations and Probabilities, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, НИС, 2+.
◦ Современные проблемы математической логики, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, Л. Д. Беклемишев, В. Б. Шехтман, НИС, 2+.
◦ Functional Analysis and Noncommutative Geometry, A. Yu. Pirkovskii, НИС, 3+.
◦ Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, НИС, 3+.
◦ Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, НИС, 3+.
◦ Дифференциальные уравнения и анализ в векторных расслоениях на римановых поверхностях, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, НИС, 3+.
◦ Семинар по симплектической геометрии, квантовым когомологиям и категориям Фукая, Л. Кацарков, Л. А. Суханов, И. А. Яковлев, НИС, 3+.
◦ Stochastic analysis and its applications in economics, V. D. Konakov, A. V. Kolesnikov, НИС, 3+.
◦ Integrability in Quantum Field Theory, Mikhail Alfimov, НИС, 3+.

ВЕСНА

◦ Combinatorics of Vassiliev invariants, M. E. Kazarian, S. K. Lando, НИС, 2+.
◦ Representations and Probabilities, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski, НИС, 2+.
◦ Современные проблемы математической логики, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, Л. Д. Беклемишев, В. Б. Шехтман, НИС, 2+.
◦ Functional Analysis and Noncommutative Geometry, A. Yu. Pirkovskii, НИС, 3+.
◦ Теория представлений, Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, НИС, 3+.
◦ Динамические системы, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин, НИС, 3+.
◦ Дифференциальные и разностные уравнения и их изомонодромные деформации, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный, НИС, 3+.
◦ Семинар по симплектической геометрии, квантовым когомологиям и категориям Фукая, Л. Кацарков, Л. А. Суханов, И. А. Яковлев, НИС, 3+.
◦ Stochastic analysis and its applications in economics, V. D. Konakov, A. V. Kolesnikov, НИС, 3+.
◦ Integrability in Quantum Field Theory, Mikhail Alfimov, НИС, 3+.

СПЕЦКУРСЫ

ОСЕНЬ

- **Группы и алгебры Ли, Л. Г. Рыбников, 3+.**
- Representations of classical groups and related topics, G. I. Olshanski, НИС, 3+.
- Модулярные поверхности, А. М. Левин, О. В. Шварцман, НИС, 3+.
- Distribution of prime numbers, A. B. Kalmynin, НИС, 3+.
- Введение в теорию моделей, В. Б. Шехтман, НИС, 3+.
- **Терия пучков, Н. С. Маркарян, 3+.**
- **Differential Geometry and its applications to classical mechanics[1], V. A. Vologodsky, 3+, 5 credits.**
- **Smooth Structures On Manifolds, A. S. Tikhomirov, НИС, 3+.**
- **Complex geometry, M. S. Verbitsky, НИС, 3+, Module 1, 3 credits.**
- Топология алгебраических многообразий, С. М. Гусейн-Заде, НИС, 3+.
- **Спектральные последовательности в топологии, С. А. Абрамян , НИС, 3+.**
- **Контактная топология и инварианты Лежандровых узлов, П. Е. Пушкарь, И. А. Яковлев, НИС, 3+.**
- **Smooth, PL and topological manifolds, A. G. Gorinov, НИС, 3+.**
- **Homotopy theory, A. G. Gorinov, НИС, 3+.**
- Cluster varieties, V. G. Gorbounov, НИС, 3+.

- Математическая теория игр и справедливое распределение, О. Р. Мусин, 3+.
- Markov chains, A. Dymov, 3+.
- Introduction to Ergodic Theory, M. L. Blank, 3+, описание на русском.
- **Introduction to Mathematical Statistics, A. S. Skripchenko, A. V. Klimenko, 3+, Module 2, 3 credits.**
- **Прикладные методы анализа[2], С. М. Хорошкин, Х. С. Ниров, 3+, 5 кредитов.**
- **Гамильтонова механика, В. А. Побережный, 3+.**
- **Математические основы квантовой механики, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов, 3+.**
- **Квантовая механика, В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов, 3+.**
- **Классическая теория поля, П. И. Дунин–Барковский, П. А. Сапонов, 3+.**
- Функциональный интеграл, А. Г. Семёнов, НИС, 3+.

ВЕСНА

- **Invariant Theory, M. V. Finkelberg, НИС, 3+.**
- **Группы Ли 2, С. М. Хорошкин, 3+, модуль 3, 3 кредита.**
- **Алгебры Ли 2, А. С. Хорошкин, 3+, модуль 4, 3 кредита.**
- **The Weil conjectures, V. A. Vologodsky, НИС, 3+.**
- **Introduction to category theory and homological algebra, C. Brav, 3+.**
- Теория Морса, П. Е. Пушкарь, НИС, 3+.
- **Дифференциальная геометрия, А. В. Пенской, 3+.**

- Algebraic geometry: Deformation theory with the view of Mori theory, V. S. Zhgoon, НИС, 3+.
- Analysis of several complex variables, A. A. Glutsyuk, НИС, 3+.
- **Характеристические классы, М. Э. Казарян, А. С. Хорошкин, 3+.**
- **An introduction to factorisation homology, C. Brav, A. G. Gorinov, A. S. Khoroshkin, НИС, 3+.**
- Введение в стабильную и нестабильную теорию гомотопий, Д. Б. Каледин, НИС, 3+, модуль 3, 2 кредита.
- Операторы продолжения и усреднения на метрических компактах, П. В. Семёнов, НИС, 3+.

- **Functional Analysis 2 (Operator Theory), A. Yu. Pirkovskii, 3+.**
- C^*-algebras and compact quantum groups, A. Yu. Pirkovskii, 3+.
- **Математика для прагматика, А. В. Хохлов, 3+.**
- Introduction to the theory of random processes, M. L. Blank, 3+, описание на русском.
- **Стохастический анализ с приложениями в финансах, А. В. Колесников, 3+.**

- **Уравнения с частными производными, С. В. Шапошников, 3+.**
- **Введение в теорию интегральных уравнений, А. К. Погребков, НИС, 3+.**
- **Группы кос, квантовые группы и приложения, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, НИС, 3+.**
- **Элементы стохастической динамики, А. С. Ильин, НИС, 3+.**
- Математические основы описания ранней вселенной, К. П. Зыбин, НИС, 3+.
- **Квантовая теория поля, А. Г. Семёнов, НИС, 3+.**

[1]This course is required for graduate students in profile «Mathematics» and is called «Mathematical Methods of Science» in the official «РУП» of MSc program. Other students, including the undergraduate, may take this course as a special course.

[2]Этот курс обязателен для студентов магистратуры, обучающихся по профилю «математическая физика», и входит в официальный РУП магистратуры под названием «Математические методы естествознания». Все остальные студенты, включая студентов бакалавриата, могут взять этот курс в качестве спецкурса по выбору.

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются сотрудниками других факультетов и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Курсы программирования на Python, эконометрики и машинного обучения не учитываются в ограничении на суммарное число нематематических курсов в ИУП. Все остальные курсы учитываются в этом ограничении наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ.

КУРСЫ, ЧИТАЕМЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЯМИ ДРУГИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

ОСЕНЬ

- **Введение в лингвистику, Б. Л. Иомдин, 1+.**
- **Избранные главы математической экономики, М. И. Левин, НИС, 3+.**

ВЕСНА

- **Машинное обучение, И. В. Щуров, 3+.**
- **Основы эконометрики, И. Б. Воскобойников, 3+.**
- **Методы сбора и анализа социологической информации, А. Я. Кирута, 3+.**
- **Основы программирования на Python-2, В. Е. Иванникова, 3+.**

Курсы для тех, кто увлёкся приложениями математики

Студентам, у которых курсовая или выпускная квалификационная работа посвящена приложениям математики, рекомендуется включить в свой ИУП следующие из перечисленных выше курсов:

КУРСЫ, ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НА ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСЕНЬ

- Математическая теория игр и справедливое распределение, О. Р. Мусин, 3+.
- **Introduction to Mathematical Statistics, A. S. Skripchenko, A. V. Klimenko, 3+, Module 2, 3 credits.**

ВЕСНА

- **Математика для прагматика, А. В. Хохлов, 3+.**
- **Основы программирования на Python-2, В. Е. Иванникова, 3+.**

- **Машинное обучение, И. В. Щуров, 3+.**
- **Линейное программирование, А. В. Колесников, 2+.**
- **Основы эконометрики, И. Б. Воскобойников, 3+.**
- **Методы сбора и анализа социологической информации, А. Я. Кирута, 3+.**

Курсы НОЦ МИАН

В Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН) реализуется научно-образовательная программа МЦМУ МИАН (НОЦ МИАН). Её целью является подготовка сильных студентов, желающих заниматься математикой и физикой на профессиональном уровне. Ведущие учёные читают специальные курсы и ведут исследовательские семинары по основным математическим и физическим дисциплинам. Занятия проходят в вечернее время в здании МИАН, как правило, начиная с 18^{00}. Экзамены принимаются после окончания каждого семестра. Студенты и аспиранты математического факультета НИУ ВШЭ могут включать курсы и семинары НОЦ МИАН в свой ИУП. Каждый сданный курс или семинар НОЦ МИАН оценивается в 3 кредита. Расписание НОЦ МИАН в весеннем семестре 2021 г. см. на сайте https://www.mi-ras.ru/index.php?c=noc2021_2

Статистическая информация о курсах

в настоящей момент в книге курсов имеется	осенью	весной
всего	50	56
дисциплин	18	19
НИСов	32	37
толстых	23	27
тонких	27	29
на русском	31	38
на английском	19	18
из них с русским описанием	1	4
для первого курса	7	8
для второго курса	17	21
продвинутых	33	35
нематематических	2	4

Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса («учебная дисциплина» или «НИС») и целевой аудитории.

Алгебры Ли 2
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. С. Хорошкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 4-й модуль 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Это вторая часть двухмодульного блока курсов «Группы и алгебры Ли 2», посвящённая классификации алгебр Ли и их представлений. В частности, мы опишем неприводимые комплексные представления разрешимых и полупростых алгебр Ли, изучим комбинаторику систем корней и групп Вейля, связанных с простыми алгебрами Ли. Классификация конечномерных представлений комплексных алгебр Ли является одним из красивейших приложений линейной алгебры и служит ключевым инструментом в очень многих областях математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс является продолжением курса «Группы и алгебры Ли», студенты должны быть хорошо знакомы с линейной алгеброй и теорией групп в объёме стандартных курсов первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Абелевы, нильпотентные и разрешимые алгебры Ли, Теорема Энгеля.
2. Разложение Леви.
3. Форма Киллинга и инвариантные формы, критерий Картана.
4. Полупростые алгебры Ли и полная приводимость, операторы Казимира.
5. Картановское разложение, системы корней, отражения.
6. Решетки корней и весов, группы Вейля ранга 2.
7. Матрица Картана, диаграмма Дынкина.
8. Формулы Вейля. Характеры и размерности неприводимых представлений.

УЧЕБНИКИ:

[K] A. Kirillov, Jr., «An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras».

[S] Ж.-П. Серр, «Алгебры Ли и Группы Ли».

[H] Дж. Хамфрис, «Введение в теорию алгебр Ли и их представлений».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка вычисляется по формуле $\min(100,\ 0.6\,H + 0.6\,E)/10$, где H — процентная доля решённых задач из домашних и проводимых на семинарах коротких контрольных работ, E — процентная доля задач, решённых на письменном экзамене.

КОММЕНТАРИЙ: Первая часть двухмодульного блока «Группы и алгебры Ли 2» читается в 3-м модуле С. Хорошкиным.

Введение в алгебраическую теорию чисел
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая теория чисел возникла из исследований диофантовых уравнений, в частности, попыток доказать великую теорему Ферма. Сейчас это обширная классическая область арифметики, лежащая в основании современной арифметической геометрии. В этом курсе мы напомним основы теории Галуа, рассмотрим так называемую теорию ветвления, докажем основные теоремы о структуре идеалов (разложения на простые идеалы), докажем теорему Дирихле о структуре S-единиц, теорему о конечности группы классов. Мы осветим очень важную аналогию между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических кривых над конечными полями, а также расскажем о геометрии Аракелова позволяющей построить «компактификацию» кривой над кольцом целых алгебраических чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартный курс алгебры первого года бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Теория Галуа и конечные поля. Основные факты из теории Галуа. Структура конечных полей. Уравнения над конечными полями. Квадратичный закон взаимности.
2. p-адические числа. Сравнения и p-адические числа. Лемма Гензеля. Теорема Островского.
3. Квадратичные формы. Представление чисел квадратичными формами над $\mathbb{Q}_p$ и над $\mathbb{Q}$. Теорема Минковского – Хассе.
4. Поля алгебраических чисел. Дедекиндовы кольца. Разложение на простые идеалы. Модули над Дедекиндовыми кольцами.
5. Норма и след. Ветвление, дискриминант, дифферента.
6. Адели и идели.
7. Группа классов идеалов. Теорема конечности. Константа Минковского.
8. Теорема Дирихле о S-единицах.
9. Циклотомические поля.
10. Когомологии Галуа.
11. Теория полей классов.
12. Геометрия Аракелова.

УЧЕБНИКИ:

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». — М.: Наука, 1985.
2. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. Ленг С. «Алгебра». — М.: Мир, 1968.
4. Ленг С. «Алгебраические числа». — М.: Мир, 1972.

5. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. «Введение в современную теорию чисел». — М.: МЦНМО, 2009.

6. Серр Ж.-П. «Курс арифметики». — М.: Мир, 1972.

7. Касселс Д., Фрелих А.(ред.), Алгебраическая теория чисел. — 1969.

8. Serre J.-P. Local fields. — Springer, 2013.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $2\left((\text{final exam })/3+(\text{problem sheets})/3\right)/10$.

КОММЕНТАРИЙ: при наличии иностранных слушателей я готов перейти на английский, но рассчитываю на понимание английских слушателей, если я время от времени буду переводить сказанное по-английски на русский язык.

Введение в алгебраическую топологию
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: М. Э. Казарян, П. Е. Пушкарь.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Одна из наиболее ярких черт, отличающих математику XX века от всей предшествующей — появление и развитие алгебраической топологии. В настоящее время использование алгебро-топологического инструментария стало непременным атрибутом значительной части математических исследований. Сочетание геометрических идей с формализованными алгебраическими алгоритмами для вычисления топологических инвариантов привели к эффективному средству изучения многих математических структур, в том числе, и не связанных напрямую с топологией. Эта область математики породила, например, такие направления как гомологическая алгебра и теория алгебр Хопфа. В курсе предлагается значительное количество задач на вычисление алгебро-топологических характеристик различных топологических пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

- Топологические пространства и операции над ними.
- Цепной комплекс, циклы, границы, гомологическая эквивалентность.
- Симплициальные, сингулярные, клеточные гомологии.
- Длинная точная последовательность.
- Гомологии многообразий. Двойственность Пуанкаре.
- Индекс пересечения и степень отображения.
- Умножение в когомологиях и пересечения циклов.
- Теория Морса. Неравенства Морса.

УЧЕБНИКИ:

- Васильев В. А. Введение в топологию. — М.: Фазис, 1997
- Прасолов В. В. Элементы теории гомологий. — М.: МЦНМО,2006
- Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989
- Hatcher A. Algebraic Topology

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (контрольная) + 0.6 (экзамен), округление вверх по 10-балльной шкале.

Введение в квантовую теорию
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: На примере электромагнитной волны вводятся основные постулаты квантовой теории (пространство состояний, наблюдаемые, вопрос об измерениях и динамика), ее структура и математический аппарат. Обсуждается взаимоотношение классической и квантовой теорий. Пользуясь введенными понятиями изучаются важнейшие примеры квантовых систем — гармонический осциллятор, частица в кулоновском (ньютоновском) поле, свободная релятивистская частица. Курс предполагает существенную самостоятельную работу по решению задач.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии), школьный курс физики.

ПРОГРАММА:

1. Классическая теория на примере электромагнитной волны. Электромагнитная волна — набор гармонических осцилляторов. Гамильтонов подход. Gedanken эксперименты со светом — прохождение через поляризатор и фотоэффект. Вывод: наш мир не классический. Соотношения неопределенности.

2. Состояния физической системы в квантовой теории. Собственные состояния. Принцип суперпозиции. Вероятность перехода из одного состояния в другое (амплитуда перехода). Пространство состояний — гильбертово пространство.

3. Наблюдаемые в квантовой теории — операторы на гильбертовом пространстве. Действие оператора на собственные состояния. Требование самосопряженности оператора. Измерение наблюдаемой как задача на собственные значения.

4. Соотношение неопределенности и одновременная измеримость физических величин. Канонические коммутационные соотношения. Каноническое квантование в квантовой теории. Полный набор наблюдаемых.

5. Динамика в квантовой теории. Уравнение Шредингера. Гамильтониан как наблюдаемая, определяющая динамику в квантовой теории. Сохраняющиеся наблюдаемые.

6. Квантование гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. Энергетический спектр и собственные состояния.

7. Когерентные состояния. Когерентные состояния как минимизирующие соотношение неопределенности. Динамика когерентного состояния. Разложение единицы для когерентных состояний. Предельный переход к классической теории.

8. Измерения координаты и импульса. Непрерывный спектр. Спектральная теорема.

9. Измерение момента импульса. Квантовая теория частицы в центральном потенциале. Атом водорода.

10. Релятивистская теория Дирака, спин. Физическая несостоятельность одночастичной квантовой теории: необходимость квантовой теории поля.

УЧЕБНИКИ:

1. П. Дирак, Принципы квантовой механики, 1979
2. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэнд, Фейнмановские лекции по физике
3. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, 1980

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна результату трёх контрольных и одного коллоквиума. Точный смысл этой формулы глубок и неопределён, как квантовая теория.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Введение в коммутативную алгебру
учебная дисциплина на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ЛЕКТОР: А. Б. Павлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Классическая алгебраическая геометрия изучает геометрию множества решений полиномиальных уравнений. В простейшей ситуации коэффициенты полиномиального уравнения принадлежат алгебраически замкнутому полю. Рассмотрение полиномиальных уравнений с коэффициентами в таких кольцах как, например, кольцо целых некоторого поля алгебраических чисел, приводит к вопросам и задачам современной алгебраической геометрии и теории чисел. Коммутативная алгебра является удачным инструментом, помогающим отвечать на такие базовые вопросы о системах полиномиальных уравнений, как конечная порождённость системы, существование решения в подходящем расширении, сколько неприводимых компонент имеет пространство решений, каковы их размерности, гладки ли они и т. п.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Обязательные курсы первых 3 семестров, предлагаемые на факультете математики. В частности, основы алгебры (группы, кольца, поля), линейная алгебра (включая понятие тензорного произведения), базовый курс геометрии.

ПРОГРАММА:

- Кольца, алгебры, идеалы, модули. Нётеровы кольца.
- Факториальные кольца. Кольца и модули частных.
- Целая зависимость и лемма Нётер о нормализации. Теоремы о спуске и подъёме.
- Пределы, копределы и тензорное произведение. Плоские и проективные модули.
- Теорема Гильберта о нулях. Спектр кольца.
- Размерность Крулля и степень трансцендентности.
- Примарное разложение.
- Кольца дискретного нормирования и дедекиндовы области.
- Теория размерности нетеровых колец.
- Функция Гильберта.

УЧЕБНИКИ:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- М. Атья И. Макдональд. «Введение в коммутативную алгебру», Мир, Москва (1972)
- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» New York, NY: Springer-Verlag, 1999.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка является взвешенной суммой

- итогового письменного экзамена (50%),
- письменной промежуточной контрольной (30%),
- небольших тестов, проводимых на семинарах (30%).

Введение в римановы поверхности
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: С. К. ЛАНДО.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Основы теории римановых поверхностей были заложены во второй половине XIX века. В ней сошлись передовые на тот момент разработки анализа, алгебры и еще не созданной топологии. На протяжении всего XX века теория римановых поверхностей, объединившись с теорией комплексных алгебраических кривых, не раз выходила на передний план развития математики. Она позволила объяснить многие трудности, возникающие при интегрировании различных функций, и разработать эффективные методы взятия интегралов, прояснила теорию Галуа и привела к новому пониманию арифметики, стала полигоном для теории комплексных многообразий и теории функциональных классов. В последние десятилетия века римановы поверхности оказались востребованы как один из наиболее эффективных инструментов исследования интегрируемых систем и связанных с ними моделей математической физики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии); курс комплексного анализа (функции одной переменной)

ПРОГРАММА:

- Предварительные сведения.
- Определения. Компактная риманова поверхность, ассоциированная с алгебраическим уравнением на плоскости.
- Род гладкой плоской кривой.
- Мероморфные функции на римановой поверхности.
- Дифференциальные 1-формы и векторные поля на римановых поверхностях. Вычеты.
- Дивизоры.
- Формула Римана – Роха и её приложения.
- Канонические кривые.
- Точки Вейерштрасса
- Теорема Абеля.

УЧЕБНИКИ:

[KLP] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, «Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей», М., МЦНМО, 2019, https://math.hse.ru/courses_math/spec-ak-pm.

[Ga] R. C. Gunning. «Lectures on Riemann Surfaces».

[GHr] Ph. Griffiths, J. Harris. «Principles of Algebraic Geometry», Chapter 2.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Контрольная 3. Работа на семинаре 4. Экзамен 7. Если суммарная оценка превышает 10, то результат уменьшается до 10.

Введение в стабильную и нестабильную теорию гомотопий
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Д. Б. Каледин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 2 кредита.

ОПИСАНИЕ: введение в стабильную и нестабильную теорию гомотопий.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знакомство с гомологической алгеброй и теорией категорий, а также с базовыми понятиями алгебраической топологии (гомотопические группы, гомологии).

ПРОГРАММА:

1. Теория гомотопий в категорном контексте. Стабильная и нестабильная гомотопические категории.
2. Когомолические операции. Алгебра Стинрода.
3. Ориентируемые теории когомологий. Описание в терминах формальных групп.
4. Спектральная Адамса – Новикова.

УЧЕБНИКИ: нет

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: экзамен в конце курса; активные участники по решению инструктора могут получить «автомат».

Введение в теорию интегральных уравнений
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. К. Погребков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория интегральных уравнений — важный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, математической физике, классической и квантовой механике. Владение методами этой теории — необходимый аппарат для каждого математика.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, теория дифференциальных уравнений, комплексный анализ, линейная алгебра

ПРОГРАММА: Сведение начальных задач и задач Коши дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям, простейшие примерам и классификации линейных интегральных уравнений, теоремы Фредгольма, теория интегральных уравнений с вырожденными ядрами и близким к ним, интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами и особые интегральные уравнения, теория уравнений Вольтерра, теория интегральных уравнений с действительными симметрическими ядрами и существование собственных функций у таких уравнений, теорема Гильберта–Шмидта и теорема о разложении ядер, классификация ядер, теорема Дини и ее приложения.

УЧЕБНИКИ: И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Введение в теорию моделей
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория моделей — быстро прогрессирующая область, на стыке математической логики, алгебры и других дисциплин: теории алгоритмов, теории множеств, теории категорий, теории игр. Она изучает связь между математическими структурами и их формальными теориями. Методы теории моделей применяются для решения трудных проблем, например, проблемы континуума или проблемы Уайтхеда. Цель курса — знакомство с основными понятиями и методами теории моделей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Логика и алгоритмы (1 модуль), основы алгебры, основные понятия топологии.

ПРОГРАММА: Теории и модели. Полнота и компактность. Элементарные расширения. Опускание типов. Модельная полнота. Элиминация кванторов. Ультрапроизведения. Насыщенные модели. Категоричность.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. М. Наука, 1982.
- Бруно Пуаза. Курс теории моделей. https://www.math.wisc.edu/~lempp/poizat/poizat1251.html.
- W. Hodges. Model theory. CUP, 1993
- D. Marker. Model theory. Springer, 2002.
- Д. Кейслер, Ч. Чэн. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Накопленная оценка = (число решённых задач) $\times\, 10\,/\,12$. Если эта оценка не менее 8, она равна итоговой. Иначе: итоговая оценка = (число решённых задач) $\times\, 0.75$ + оценка за экзамен $\times\, 0.5$. Округление до ближайшего целого.

КОММЕНТАРИЙ: Курс доступен студентам, начиная со 2 курса, а также продвинутым первокурсникам (в виде исключения).

Введение в теорию случайных процессов
учебная дисциплина на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ЛЕКТОР: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы анализа и теории вероятностей

ПРОГРАММА:

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003.
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен), накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Введение в теорию чисел
учебная дисциплина для студентов 1-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. З. ШАРИЧ.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория чисел состоит из множества разнообразных вопросов и методов их исследования. Курс содержит две части. Первая часть посвящена подробному изучению элементарной теории чисел с использованием инструментов высшей математики. Вторая часть даст слушателям представление о возможных направлениях углубления и основных результатах в рамках этих направлений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

1. **Делимость и простые числа.** Евклидовы кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\imath]$. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Основная теорема арифметики. p-показатели. Лемма об уточнении степени. Постулат Бертрана.

2. **Кольца вычетов по модулю.** Обратимые вычеты. Теорема Вильсона. Функция Эйлера и её свойства. Теорема Эйлера. Китайская теорема об остатках. Теорема Шевалле. Примитивные вычеты. Квадратичные вычеты (критерий Эйлера, квадратичный закон взаимности Гаусса).

3. **Цепные (непрерывные) дроби.** Свойства цепных дробей. Приближение иррациональных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.

4. **Задачи на решётках.** Формула Пика. Теорема Блихфельда. Лемма Минковского. Теорема Кронекера. Равномерно распределённые последовательности. Теорема Ван-дер-Вардена.

5. **Многочлены над $\mathbb{Z}$.** Неприводимые многочлены. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна. Признак Дюма.

6. **Диофантовы уравнения.** Линейные диофантовы уравнения. Методы решения нелинейных диофантовых уравнений: метод остатков, метод разложений, метод оценок, метод спуска. Пифагоровы тройки. Уравнения Пелля. Суммы двух квадратов. Суммы четырёх квадратов.

7. **Основы алгебраической теории чисел.** Конечные расширения $\mathbb{Q}$. Лемма о простом расширении. Кольцо целых. Поле алгебраических чисел $\mathbb{A}$. Алгебраическая замкнутость $\mathbb{A}$. Теорема Лиувилля. Теорема Линдемана (б/д). Трансцендентность π и e.

8. **Основы аналитической теории чисел.** Гамма-функция Эйлера. Дзета-функция Римана. Ряды Дирихле, теорема Дирихле об арифметических прогрессиях (б/д). Теорема Чебышёва о распределении простых чисел.

9. **Основы комбинаторной теории чисел.** Теорема Коши – Дэвенпорта. Теорема Плюннеке – Ружа. Теорема Семереди (б/д). Теорема Грина – Тао (б/д).

10. **p-адические числа.** Неархимедовы нормы в $\mathbb{Q}$ и пополнения $\mathbb{Q}$ по ним. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ и его свойства. Лемма Гензеля.

УЧЕБНИКИ:

[D] Г. Дэвенпорт, «Введение в теорию чисел».

[B] А. Бухштаб, «Теория чисел».

[H] Г. Хассе, «Лекции по теории чисел».

[V] И. М. Виноградов, «Основы теории чисел». отдельным разделам)

[U] В. В. Вавилов, А. В. Устинов «Многоугольники на решётках».

[W] Г. Вейль, «Введение в алгебраическую теорию чисел».

[N] М. Натансон, «Обратные задачи теории чисел».

[K] С. Б. Каток, «*p*-адический анализ в сравнении с вещественным».

[P] В. В. Прасолов, «Многочлены».

Введение в фробениусовы алгебры и зеркальную симметрию
НИС на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

РУКОВОДИТЕЛИ: А. А. Басалаев, П. И. Дунин–Барковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: *Фробениусовы алгебры* — это ассоциативные алгебры с единицей, оснащённые определённым образом согласованной с произведением билинейной формой. Несмотря на простоту определения, они играют важную роль во многих интересных задачах из разных областей науки. Одной из таких областей является изучение особенностей вроде острия кривой $y^2 = x^3$ в точке $(0, 0)$ (ср. с особенностью кривой $y^2 = x^3 + x^2$ в той же точке). Курс начнётся с определения фробениусовых алгебр, обсуждения их свойств и примеров. Затем мы обсудим основы теории особенностей и связь фробениусовых алгебр с этой теорией, а также появление фробениусовых алгебр в физике (в частности, т.н. «двумерные топологические квантовые теории поля», которые далеко не так страшны, как их название). В конце курса будут упомянуты фробениусовы многообразия, для этого будут даны все необходимые базовые сведения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: алгебра и геометрия для первого курса бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Алгебры со спариванием, фробениусовы алгебры. Эквивалентные формулировки, единственность спаривания, ограничения, вытекающие из условия фробениусовости.
2. Примеры не-фробениусовых ассоциативных коммутативных алгебр. Формальное описание фробениусовых алгебр в терминах единицы, коединицы и тензора произведения. Описание соответствующих графов и кобордизмов.
3. Фробениусовы алгебры, приходящие из теории особенностей: примеры A, D, E.
4. Корневые системы типов A, D, E, группы Кокстера, структура фробениусовой алгебры на пространстве инвариантных многочленов.
5. Фробениусовы алгебры, происходящие из когомологий многообразий. Пример: $\mathbb{CP}^n$.
6. Аксимы Атьи двумерных топологических квантовых теорий поля. Связь с физикой.
7. Зеркальная симметрия как изоморфизм фробениусовых алгебр, некоторые простые примеры.
8. Многообразия с произведением. Ассоциативные и коммутативные случаи, F-многообразия.
9. F-многообразия, связанные с деформацией особенностей: примеры A, D, E.

УЧЕБНИКИ:

- J.Kock, «Frobenius Algebras and 2d Topological Quantum Field Theories», Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- C.Hertling, «Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities», Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- С.М.Натанзон, «Геометрия двумерных топологических теорий поля», МЦНМО, Москва, 1998.

◦ В.И.Арнольд, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, О.В. Ляшко, «Особенности. I. Локальная и глобальная теория», ВИНИТИ, Москва, 1988.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $\min(10, \lceil S + C + T + E \rceil)$, где

- $\lceil \ldots \rceil$ означает округление вверх
- $S \in [0, 4]$ — оценка за сдачу листков
- $C \in [0, 4]$ — оценка за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий)
- $T \in [0, 3]$ — оценка за 30-минутный доклад на одном из семинаров
- $E \in [0, 5]$ — оценка за устный экзамен.

Если накануне экзамена выполняется условие $\min(10, \lceil S + C + T \rceil) \geqslant 8$, то эта оценка при желании студента может быть выставлена в качестве итоговой без экзамена.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Введение в эргодическую теорию
учебная дисциплина на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ЛЕКТОР: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов. Естественным его продолжением является сколковский курс «Динамика и эргодическая теория». Предварительных знаний кроме курса мат. анализа не требуется (хотя они и желательны).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс анализа.

ПРОГРАММА:

1. Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
2. Топологические свойства измеримой динамики.
3. Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
4. Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая – Боуэна – Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
5. Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
6. Эргодический подход к задачам теории чисел.
7. Энтропия: метрический и топологический подходы.
8. Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
9. Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
10. Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

УЧЕБНИКИ:

1. М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
3. A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен). Накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Гамильтонова механика
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс гамильтоновой механики относится к базовым фундаментальным теоретико-физическим курсам и направлен на знакомство слушателей с современным взглядом на основы теории интегрируемых систем и математической физики. Курс рассчитан на старших студентов бакалавриата и студентов магистратуры, освоение его программы даёт возможность в дальнейшем изучать более продвинутые курсы связанные с математической физикой. Математический аппарат современной теории гамильтоновых систем включает в себя методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, групп и алгебр Ли и их представлений, симплектической и пуассоновой геометрии, анализа на многобразиях и многих других. Приобретение практических навыков применения методов и конструкций этих разделов математики, умение их сочетать для решения задач механики является одной из целей данного курса. Курс может быть рекомендован не только студентам собирающимся продолжить свою обучение на программе «Математика и математическая физика», но и планирующим специализироваться в чистой математике или её приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Два года бакалавриата (стандартные курсы анализа, анализа на многообразиях, дифференциальных уравнений). Физического бэкграунда не требуется.

ПРОГРАММА:

- Ньютонов формализм: напоминание, симметрии, геометрия
- Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия, уравнения Эйлера – Лагранжа, симметрии, законы сохранения
- Гамильтонов формализм: интегрируемость по Лиувилю – Арнольду, канонические преобразования, уравнения Гамильтона – Якоби, симметрии
- Симплектические и пуассоновы структуры: теорема Дарбу, алгебры Ли и орбиты коприсоединённого действия, скобка Кириллова – Костанта, отображение момента.
- Разделение переменных, представление Лакса

УЧЕБНИКИ:

- В. И. Арнольд «Математические методы классической механики», 3-е изд. М. : Наука, 1989
- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли» М. : Наука, 1990
- Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики» М. : Наука, 1974

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле (сумма оценок за две контрольные)/4 + (оценка за экзамен)/2 с округлением до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию
учебная дисциплина на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ЛЕКТОР: А. С. Тихомиров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве, и служит мостом между точным, но скудным языком алгебраических формул и бесконечно богатым, но трудно выражаемым в словах миром геометрических образов. Поэтому алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях математики и математической физики, являясь наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является геометрическим введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также современной алгеброй, которая за ними стоит.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (алгебра, анализ, геометрия, топология).

ПРОГРАММА:

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, PGL (2), кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.
- Доза коммутативной алгебры: целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Словарик «Коммутативная алгебра – Аффинная алгебраическая геометрия». Спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара.
- Если позволит время: (ко)касательные и (ко)нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на грассманиане.

УЧЕБНИКИ:

- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.

- А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка = 5·(доля решенных задач из листков) + 5·(доля решенных задач из итогового письменного экзамена)

Геометрия и группы
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: О. В. ШВАРЦМАН.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Этот традиционный НИС , в основном рассчитанный на первокурсников, будет посвящен избранным вопросам геометрии и арифметики бинарных квадратичных форм с рациональными коэффициентами. В первую очередь, нас будут интересовать глубокие и красивые связи теории бинарных квадратичных форм с арифметикой и геометрией квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первые полгода бакалавриата (курсы алгебры и геометрии)

ПРОГРАММА:

- Бинарные формы над полем рациональных чисел, эквивалентность бинарных форм.
- Бинарные формы с целыми коэффициентами. Представление чисел бинарными квадратичными формами. Группа целочисленных автоморфизмов бинарной формы с целыми коэффициентами.Теория приведения бинарных квадратичных форм и цепные дроби.
- Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля. Группа единиц и теорема Дирихле.Решетки, идеалы, порядки. Соответствие между решетками и квадратичными формами. Группа классов идеалов и группа классов бинарных квадратичных форм.

УЧЕБНИКИ:

- Э. Б. Винберг. Курс алгебры.
- З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Планируется провести две контрольные и итоговый экзамен. Накопленная оценка равна полусумме оценок за две контрольные. Итоговая оценка равна полусумме накопленной оценки и оценки за экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Геометрия и динамика
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, А. С. Скрипченко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар рассчитан на студентов 1 – 2 курса бакалавриата. Предполагается рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей, при этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Отсутствуют. Каждый семестр семинара может изучаться независимо.

ПРОГРАММА:

- Элементы теории вероятностей (Условная вероятность, независимость событий. Основы теории марковских цепей.)
- Символическое кодирование в динамических системах (Метод символического кодирования. Примеры: удвоение окружности, растягивающие отображения.)
- Бильярды в плоских областях (Бильярдный поток. Исследование простейших бильярдов: в круге, прямоугольнике, эллипсе. Связь бильярдов в рациональных многоугольных областях с потоками на плоских поверхностях.)
- Геометрия Лобачевского (Модели геометрии Лобачевского. Движения в геометрии Лобачевского. Дискретные подгруппы группы движений)
- Асимптотическое поведение траекторий и структурная устойчивость (Альфа-и омега-предельные множества траектории векторного поля. Теория Пуанкаре – Бендиксона. Структурная устойчивость. Теорема Андронова – Понтрягина)
- Перекладывания отрезков (Перекладывания отрезков. Индукция Рози как пример динамики в пространстве систем. Минимальность и строгая эргодичность.)
- Элементы комплексной динамики (Полиномиальные отображения в комплексной области. Неподвижные точки и периодические орбиты: локальная теория. Множества Жюлиа и Фату. Пространство параметров и множество Мандельброта.)
- Геометрическая теория групп (Граф Кэли для набора образующих. Рост группы и другие асимптотические свойства.)

УЧЕБНИКИ: по договорённости.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 30%: письменные работы на занятиях, 70%: устный экзамен (обсуждение решений задач для домашнего решения). Округление производится по стандартным правилам, каждый из компонентов оценки может превосходить 10.

КОММЕНТАРИЙ: этот НИС доступен для младшекурсников.

Графы на поверхностях
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Н. Я. Амбург, Б. С. Бычков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Александр Гротендик образно и поэтично называл специальные графы на двумерных поверхностях *детскими рисунками*[1]. Изучение детских рисунков, с одной стороны, не требует никакой специальной подготовки и позволяет легко познакомиться с фундаментальными топологическими инвариантами графов и поверхностей, такими как род и эйлерова характеристика, а с другой стороны быстро приводит к задачам и понятиям, лежащим в самом сердце алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. Именно в работе с такими понятными каждому школьнику объектами, как детские рисунки, Гротендик[2] видел способ преодоления барьера чрезмерной сложности и техничности, отпугивающего талантливых молодых людей от изучения современной математики. В этом курсе мы начнём с самых с азов маломерной комбинаторной топологии и с разных точек зрения обсудим несколько красивых и наглядных задач, находящихся в центре самого пристального внимания математиков и физиков.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

- Классификация двумерных компактных связных поверхностей без края.
- Детские рисунки Гротендика. Формула Эйлера.
- Группа вращения ребер. Автоморфизмы детского рисунка.
- Математические бильярды. Намотки тора.
- Математический бильярд как Риманова поверхность.
- Многочлены Чебышева.
- Функции Белого.
- Гауссов интеграл и формула Вика.
- Матричные модели и ленточные графы.

УЧЕБНИКИ:

- Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.
- Звонкин А.К., Ландо С.К., Графы на поверхностях и их приложения.
- Гальперин Г.А., Земляков А.Н., Математические бильярды.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов за решение домашних задач по формуле min(10, сумма баллов за домашние задачи).

КОММЕНТАРИЙ: этот курс повторяет прошлогодний курс «Графы на поверхностях».

[1] По французски *dessins d'enfant*.

[2] См. Grothendieck A., «Esquisse d'un programme», где намечено сразу несколько маршрутов, способных сократить путь от простого к сложному.

Группы и алгебры Ли
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: Л. Г. Рыбников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Группы и алгебры Ли и их представления являются важнейшим инструментом в таких, казалось бы далеких друг от друга областях математики как алгебраическая топология, алгебраическая и дифференциальная геометрия, динамические системы и математическая физика. Данный курс является вводным курсом групп и алгебр Ли, начиная с базовых определений и примеров. Курс преследует двоякую цель: во-первых, овладение основными понятиями и общими конструкциями теории Ли, и, во-вторых, разбор первой конкретной содержательной задачи теории групп и алгебр Ли — классификации конечномерных представлений унитарной (а также полной линейной) группы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Необходимо хорошее владение линейной алгеброй и анализом на многообразиях, а также начальными понятиями топологии (включая понятия фундаментальной группы и локально-тривиального расслоения). Желательно (но не обязательно) знание теории представлений конечных групп (теорема Машке и ортогональность характеров).

ПРОГРАММА:

- Определение и примеры групп Ли. Действие группы Ли на многообразии. Замкнутые подгруппы и однородные пространства. Связные группы Ли и группа компонент.
- Определение и примеры алгебр Ли. Алгебра Ли группы Ли. Формальная группа Ли. Инвариантные векторные поля. Экспоненциальное отображение.
- Гомоморфизмы групп Ли. Касательный гомоморфизм алгебр Ли. Теорема существования и единственности гомоморфизма. Односвязные группы Ли. Теорема существования (без доказательства) и единственности связной односвязной группы Ли с данной алгеброй Ли.
- Представления групп и алгебр Ли. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Коумножение в универсальной обертывающей алгебре и тензорное произведение представлений.
- Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Оператор Казимира.
- Мера Хаара. Представления компактных групп Ли: полная приводимость и ортогональность характеров. Представления группы Ли SU_2.
- Гармонический анализ на двумерной и трехмерной сфере.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: старшие веса.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: формула Вейля для характера.
- Формула Вейля для размерности. Тождества с полиномами Шура. Полустандартные таблицы Юнга.

УЧЕБНИКИ:

[K] Alexander Kirillov Jr, «Introduction to Lie Groups and Lie Algebras».

[VO] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам».

[FH] Уильям Фултон, Джо Харрис, «Теория представлений. Начальный курс».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\min(10,\ 0.4\,E + 0.4\,H + 0.2\,C + 0.2\,M)$, где E — оценка за письменный экзамен в конце семестра, H — средняя оценка за домашние задания, C — оценка за устный коллоквиум в середине семестра, M — оценка за письменную контрольную работу в середине семестра (все оценки по 10-балльной шкале).

КОММЕНТАРИЙ: Лекции читает Л. Г. Рыбников, семинарские занятия ведёт А. С. Хорошкин. Данный курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Группы кос, квантовые группы и приложения
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В этом курсе мы обсуждаем несколько тем из теории групп кос и теории квантовых групп, в которых появляется и применяется один из самых известных объектов современной математической физики — так называемая R-матрица. R-матрица в узком понимании этого термина, с которым мы, в основном, и будем иметь дело, — это решение (кубического матричного) уравнения Янга – Бакстера, известного также как соотношение Артина, или уравнение кос.

Сферы применения R-матриц в настоящее время очень разнообразны — от теории точно решаемых моделей квантовой механики, статистической физики и теории поля до проблем построения инвариантов узлов, структурной теории и теории представлений квантовых матричных алгебр.

В курсе мы знакомим слушателей с алгебраическими структурами, порождающими R-матрицы, и обсуждаем различные приложения R-матриц в построении инвариантов узлов, в теории квантовых групп, и в исследовании интегрируемых моделей матфизики: квантовых спиновых цепочек и стохастических процессов. Очень важные для современной теоретической физики приложения R-матриц в теории интегрируемых моделей также обсуждаются в матфизическом спецкурсе «Анзац Бете».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания курса требуется знание алгебры, теории групп и теории представлений в рамках программы первых 2-х курсов матфака. Желательно также знакомство с основами теории групп и алгебр Ли, алгебр Хопфа. Впрочем, все необходимые понятия будут напоминаться в процессе занятий.

ПРОГРАММА:

- Группа кос, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерные факторы группы кос и ее групповой алгебры: симметрическая группа, алгебра Ивахори – Гекке. Теория представлений алгебр Ивахори – Гекке, связь с таблицами и диаграммами Юнга.
- R-матричные представления группы кос, примеры R-матриц: R-матрицы $GL(m|n)$ типа. Первые приложения R-матриц: R-след и инварианты узлов.
- Относительный след на алгебрах Ивахори – Гекке. Квантовые спиновые цепочки. Трансфер-матрицы и интегралы движения.
- Квантовое (т.е. конечно-разностное) уравнение Книжника – Замолодчикова. Его полиномиальные решения и их связь с моделями стохастических процессов.
- Понятие об алгебрах Хопфа. Коумножение, коединица и антипод с точки зрения теории представлений. Дуальные алгебры Хопфа.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Алгебра функций на группе и скобка Склянина как пример R-матричной скобки Пуассона. Квантованная алгебра функций на группе: R-матричный подход (так называемая RTT – алгебра).
- Алгебра функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$, скобка Пуассона – Ли. Квантование скобки Пуассона – Ли и универсальная обертывающая алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}(n))$. Квадратичная скобка на алгебре функций на $\mathfrak{gl}(n)^*$ и ее согласованность с линейной скобкой Пуассона – Ли — пучок скобок Пуассона. Квантование пучка скобок Пуассона: алгебра уравнения отражений, ее геометрическая и физическая интерпретации.

- Квантовые матричные алгебры. Определение и структура характеристической подалгебры. Квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли.

УЧЕБНИКИ:

- O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.40762.
- J. S. Birman and T. E. Brendle, «Braids: a Survey», arXiv:math/0409205 [math.RT]. In: «Handbook of Knot Theory», edited by: W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V. 20053.
- Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.
- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: За выполненные задания из листков ставится оценка $0 \leqslant N \leqslant 10$ (для получения $N = 10$ достаточно решить 80% задач из листков). Если $N \geqslant 8$, то итоговая оценка равна N. Если $N < 8$, то сдаётся экзамен, и итоговая оценка равна $(E+N)/2$, где $0 \leqslant E \leqslant 10$ — оценка за экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

КОММЕНТАРИЙ: курс читается на русском языке, руководителей двое: П. Пятов и П. Сапонов

Группы Ли 2
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: С. М. ХОРОШКИН.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Это первая часть двухмодульного блока курсов «Группы и алгебры Ли 2». Она посвящена вещественным (некомпактным) полупростым группам Ли. Теория бесконечномерных представлений вещественных групп, включая разбор основной неунитарной серии и сплетающих операторов на ней, будет подробно разобрана на примере групп $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Структура и геометрия вещественных групп будет разобрана в рамках дифференциально-геометрической теории симметрических пространств. В качестве приложений будет показано, как классические интегрируемые системы и специальные функции возникают в рамках теории представлений вещественных групп.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курс является продолжением курса «Группы и алгебры Ли», студенты должны владеть основными понятиями теории гладких многообразий, а также анализом и теорией групп в объёме стандартных курсов первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА:

- Представления основной серии групп $SL(2,\mathbb{R})$ и $SL(2,\mathbb{C})$. Различные реализации. Сплетающие операторы. Унитарные представления. Дискретная серия.
- Вещественные редуктивные группы и симметрические пространства. Геометрия симметрических пространств. Симметрические пространства компактного и некомпактного типа. двойственность. Классификационные теоремы. Разложения Картана и Ивасава вещественных полупростых групп.
- Представления вещественных групп и специальные функции. Реализация классических специальных функций и интегрируемых систем в виде матричных элементов представления вещественых групп. Примеры.

УЧЕБНИКИ:

- И. М. Гельфанд, М. И Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.
- С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства.
- Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, Представления групп Ли.
- A. Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups. An overview based on examples.
- Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,4$ (оценка за работу на семинаре)$+0,6$ (средняя оценка за 2 письменные домашн

КОММЕНТАРИЙ: Вторая часть двухмодульного блока «Группы и алгебры Ли 2» читается в 4 – м модуле А. Хорошкиным.

Динамические системы
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ и дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА: Мозаика из перечисленных выше теорий

УЧЕБНИКИ: Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей; Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений; Ильяшенко Ю., Ли Вейгу, Нелокальные бифуркации; Ильяшенко Ю., Яковенко С., Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 40% за посещение, 20% за активность, 40% за один доклад в году.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. ПЕНСКОЙ.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Дифференциальная геометрия — продолжающая активно развиваться область геометрии, изучающая феномен кривизны. Данный курс посвящён изучению кривизны начиная от классического случая кривизны кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, и заканчивая кривизной связностей в векторных расслоениях над гладкими вещественными многообразиями.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата и осенний семестр второго года бакалавриата.

ПРОГРАММА:

- Кривые в плоскости и в пространстве. Кривизна, кручение, репер Френе.
- Поверхности в трехмерном пространстве. Первая и вторая квадратичные формы. Главные кривизны, средняя и гауссова кривизна. Нормаль средней кривизны. Формула Эйлера для кривизны нормального сечения.
- Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Первая и вторая квадратичные формы. Связности в касательном и нормальном расслоениях к поверхности. Вторая квадратичная форма и оператор Вейнгартена. Деривационные уравнения Гаусса – Вейнгартена. Теорема Гаусса – Бонне для поверхностей.
- Векторные расслоения. Склеивающие коциклы. Структурная группа. Евклидовы и эрмитовы расслоения. Естественные операции с расслоениями. Ориентируемые расслоения.
- Связности в векторных расслоениях. Локальное задание связности: локальная форма связности, символы Кристоффеля. Кривизна. Связности в евклидовых и эрмитовых расслоениях. Связности, согласованные с метрикой и их кривизна.
- Связности в главных расслоениях.
- Римановы многообразия. Кручение, кривизна. Связность Леви – Чивиты. Симметрии тензора кривизны. Тензор Риччи. Скалярная кривизна.
- Геодезические. Экспоненциальное отображение. Геодезические координаты. Лагранжево описание геодезических. Вторая вариация.
- Подмногообразия римановых многообразий. Первая и вторая квадратичные формы.
- Оператор Лапласа – Бельтрами на римановых многообразиях.
- Характеристические классы. Конструкция Чженя – Вейля характеристических классов. Классы Чженя, Понтрягина и Эйлера и их свойства. Характер Чженя и его свойства.

УЧЕБНИКИ:

[dC1] М. до Кармо, «Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей».

[dC2] М. до Кармо, «Риманова геометрия».

[T] L. Tu, «Differential Geometry. Connections, Curvature, and Characteristic Classes».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: (накопленная в течение семестра оценка + оценка за экзамен)/2.

Дифференциальные и разностные уравнения и их изомонодромные деформации
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Научно-исследовательский семинар будет посвящен дифференциальным и разностным уравнениям с иррегулярными особыми точками. Мы планируем изучить различные варианты явления Стокса и подходы к его описанию, а также обсудить симплектические и пуассоновы свойства изомонодромных деформаций и применение метода изомонодромных деформаций к изучению уравнений Пенлеве.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы комплексного анализа и гладких многообразий

ПРОГРАММА:

1. Асмптитические ряды.
2. Системы дифференциалльных уравнений с иррегулярными особыми точками (формальные решения, явление Стокса).
3. Разностные уравнения (формальные решения, явление Стокса).
4. Изомонодромные деформации и изомонодромные преобразования.
5. Симплекическая и пуассонова геометрия изомонодромных деформаций.
6. Свойство Пенлеве.
7. Тау-функция изомонодромной деформации и уравнения Пенлеве.

УЧЕБНИКИ: не положено.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка вычисляется: (доля решённых во время семестра задач)$*10+$(число успешно сделанных докладов)$*5$, округлённое в ближайшую сторону. В случае выхода за границы интервала $[0,10]$ берётся его ближайшая граница.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Курс ведут два преподавателя.

Дифференциальные уравнения и анализ в векторных расслоениях на римановых поверхностях
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Научно-исследовательский семинар будет посвящен изучению голоморфных векторных расслоений с мероморфными связностям на римановой поверхности и их применению к задачам дифференциальных уравнений и математической физики. В частности мы обсудим применение этого подхода к изучению обратной задачи монодромии (проблемы Римана-Гильберта) и изучению изомонодромных деформаций фуксовых систем и их приложения к некоторым уравнениям математической физики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы комплексного анализа и гладких многообразий

ПРОГРАММА: 1. Введение в римановы поверхности. 2. Голоморфные векторные расслоения на римановых поверхностях. 3. Мероморфные связности в голоморфных векторных расслоениях. 4. Голоморфные расслоения над сферой, теорема Биркгофа-Гротендика. 5. Голоморфные расслоения над компактными римановыми поверхностями. 6. Проблема Римана-Гильберта на римановой поверхности. 7. Изомонодромные деформации.

УЧЕБНИКИ: нет

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: (доля решённых во время семестра задач)*10 + (число успешно сделанных докладов)*5, округлённое в ближайшую сторону. В случае выхода за границы интервала [0,10] берётся его ближайшая граница.

Дополнительные главы алгебры
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин, В. А. Вологодский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: модули 1 – 3 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Этот НИС является дополнением к основному курсу алгебры и рекомендуется второкурсникам, желающим выучить алгебру на продвинутом уровне. Он будет согласован с семинарами по основному курсу алгебры в группе В. А. Вологодского, и всем участникам данного НИСа настоятельно рекомендуется записаться на семинары по основном курсу алгебры именно в эту группу.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: хорошее владение материалом первого курса алгебры. На первом занятии будет входная контрольная работа по материалу первого курса алгебры, по результатам которой будут даны рекомендации для участия в данном НИСе.

ПРОГРАММА:

- Полилинейная алгебра: тензоры, свертки, симметрическая и внешняя алгебра. Примеры некоммутативных алгебр: матричная алгебра, алгебра Вейля, алгебра Клиффорда.
- Модули над алгебрами. Теоремы Жордана – Гельдера и Крулля – Шмидта.
- Лемма Шура. Полупростые алгебры. Теорема плотности.
- Групповая алгебра и теория представлений конечных групп.
- Расширения полей. Основы теории Галуа.
- Целые расширения колец. Кольца целых числовых полей.
- Если позволит время: центральные простые алгебры. Группа Брауэра.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле: $0.2\,B + 0.2\,T + 0.2\,H + 0.4\,E$, где B — оценка за входную контрольную работу на первом занятии, T — средняя оценка за контрольные работы в течение семестра, H — средняя оценка за домашние работы, E — оценка за экзамен в конце курса.

КОММЕНТАРИЙ: В 1–2 модулях руководить семинаром будут Л. Рыбников и Б. Фейгин, в 3-м — Б. Фейгин и В. Вологодский.

Избранные главы дискретной математики
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный ответ на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выразить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию.

- Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д.

- Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой дороги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные результаты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976.
3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.
4. А. И. Кострикин. Основы алгебры.
5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976.
6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Основу накопленной оценки составляет индивидуальное письменное домашнее задание, оцениваемое от 0 до 7; оценка 6 или 7 за вовремя сданное задание может быть повышена за счет дополнительных баллов, начисляемых за рассказ решений задач на семинаре (от 0,5 до 1 балла за задачу в зависимости от ее сложности) и за аудиторную контрольную работу.

Квантовая механика
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Продвинутый курс квантовой механики, в котором основные принципы квантовой теории дополняются и применяются для изучения конкретных физических систем. Предлагаются современные методы исследования квантовых систем - построение интегрируемых потенциалов, интеграл по траекториям, вводятся концепции матрицы плотности и эффективного действия. Курс предполагает переход к рассмотрению свободных полевых теорий, их каноническому квантованию, обсуждению отличия квантовой механики от квантовой теории поля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс «Введение в квантовую теорию» или сданный в бакалавриате хорошего университета курс «Квантовая механика».

ПРОГРАММА: 0. Введение. Основные принципы квантовой теории. 1. Движение электрона во внешних электромагнитных полях. Уравнение Паули. Квантование электрона в однородном и постоянном магнитном поле. Уровни Ландау. Атом водорода во внешнем поле. Теория возмущений. 2. Солитонные потенциалы, их построение и свойства. Связь с интегрируемыми системами. 3. Движение частицы в периодическом потенциале. Зонная структура. 4. Системы тождественных частиц. Бозоны и фермионы. Фоковские пространства фермионов и бозонов. 5. Квантовая система в окружении. Концепция матрицы плотности, ее вычисление интегралом по траекториям. Формула Фейнмана-Каца. 6. Динамика квантовой теории и метод функционального интеграла. 7. Модель трения Калдейры - Легетта. Эффективное действие. Квазиклассическое приближение. 8. Квантование свободного электромагнитного поля как калибровочной теории. Из- лучение абсолютно черного тела.

УЧЕБНИКИ: П. Дирак, Принципы квантовой механики, 1979; Р. Фейнман, Статистическая механика; П.В.Елютин, В.Д.Кривченков, Квантовая механика с задачами.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка = накопленная = результат трех контрольных и одного коллоквиума

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Квантовая теория поля
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В настоящее время квантовая теория поля является основным средством описания явлений происходящих в микромире: взаимодействия элементарных частиц, строение адронов и т. п. Её методы широко используются и в других областях теоретической физики: конденсированное состояние вещества, статистическая механика, теория турбулентности и др. Помимо этого, квантовая теория поля служит важнейшим стимулом для развития множества современных математических исследований. Курс посвящён изучению основных идей и методов квантовой теории поля, а также обсуждению применения её подходов к различным областям современной теоретической и математической физики. Будет рассказано о квантовании скалярных и калибровочный теорий, методе функционального интегрирования, построении теории возмущений и диаграммах Фейнмана, $(1+1)$-мерных точно решаемых теориях, а так же о применении этих подходов в различных областях современной науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гамильтонова механика, Уравнения с частными производными, Группы и алгебры Ли, Классическая теория поля, Квантовая механика.

ПРОГРАММА:

- Теория поля, симметрии, физические реализации.
- Скалярное поле и его квантование (операторный подход).
- Наблюдаемые и S-матрица.
- Метод функционального интегрирования.
- Ряд теории возмущений и построение Фейнмановских диаграмм.
- Калибровочные поля и особенности их квантования.
- Абелевы и неабелевы теории, трюк Фаддеева – Попова.
- Фермионы в квантовой теории поля.
- Бесконечности в квантовой теории поля и методы работы с ними.
- Физические эффекты в КЭД и модельных системах.
- $(1+1)$-мерные системы.
- Применение методов квантовой теории поля в смежных областях.
- Интересные непертурбативные явления в модельных системах (при наличии времени).

УЧЕБНИКИ:

1. М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
2. K. Huang. Quantum Field Theory. WILLEY-VCH, 2010.
3. A. M. Tsvelik. Quantum Filed Theory in Condensed Matter Physics. CUP, 2003.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка равна $0.4\,H + 0.6\,E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Детальное содержание курса будет зависеть от состава и уровня слушателей.

Классическая теория поля
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: П. И. Дунин–Барковский, П. А. Сапонов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Классическая теория поля является одним из краеугольных камней теоретической физики, и при этом включает в себя многие интересные математические идеи. Все потенциальные слушатели уже и так в той или иной степени знакомы с одним из примеров теории поля — теорией электромагнитного поля (которая и будет основной целью обсуждений в рамках данного курса). Теория поля изучает системы с бесконечным (условно говоря, континуальным) числом степеней свободы: у поля есть динамически меняющееся значение в каждой точке пространства.

В данном курсе будут напомнены математические формулировки основных необходимых физических принципов; будет дано краткое введение в специальную теорию относительности (описывающую пространство-время, в котором живет электромагнитное поле). Целью курса, в частности, является обсуждение того, как получать в явном виде конкретные уравнения, позволяющие описывать реальные явления в физическом мире, связанные с поведением электромагнитного поля.

При этом также будут обсуждаться интересные абстрактные математические конструкции. Например, будет обсуждаться теория Янга – Миллса, частным случаем которой является теория электромагнитного поля. Теория Янга – Миллса формулируется в терминах связностей на главных расслоениях (грубо говоря, расслоениях, на которых действуют группы Ли). При этом электродинамика соответствует группе U(1) (то есть, группе поворотов окружности). К слову, поля, соответствующие двум из трех оставшихся фундаментальных взаимодействия в природе (сильному и слабому) тоже описываются теориями Янга – Миллса, только для других групп Ли (правда, на обсуждение сильного и слабого взаимодействий в рамках данного курса уже не хватит времени). В рамках курса будут напомнены все необходимые базовые сведения про группы Ли и главные расслоения, желательно только общее знакомство с гладкими многообразиями.

Курс настоятельно рекомендуется тем, кто учится или планирует учиться по направлению «Математика и математическая физика», но также рекомендуется и всем остальным, кого интересуют упомянутые выше (а также ниже в программе курса) математические и физические вопросы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: семестровый курс «Механика» для 2-го года бакалавриата, курс «Многообразия» 2-го года бакалавриата, курс «Дифференциальные уравнения» 2-го года бакалавриата. Также желательно знакомство с основами теории групп и алгебр Ли и их представлений. На лекциях будет дано краткое напоминание нужных фактов.

ПРОГРАММА:

1. Лагранжева формулировка классической механики (напоминание): принцип наименьшего действия, первая теорема Нётер, законы сохранения и группы симметрии механической системы.
2. Основы специальной теории относительности: принцип относительности Эйнштейна, пространство Минковского, группы и алгебры Лоренца и Пуанкаре. Свободная релятивистская частица. Действие и симметрии релятивистской струны.
3. Предельный переход от механической к полевой системе. Скалярное вещественное поле. Общее решение уравнения Клейна–Гордона.
4. Принцип наименьшего действия в полевых моделях, первая теорема Нётер, сохраняющиеся токи и заряды. Тензор энергии-импульса скалярного поля.

5. Общая теория Янга – Миллса, связность в главном расслоениии, кривизна связности.

6. Свободное электромагнитное поле как пример абелевой теории Янга – Миллса. 4-вектор потенциала и тензор напряжённости, уравнения Максвелла. Калибровочная инвариантность. Кулоновская калибровка. Плоские волны.

7. Релятивистская частица во внешнем электромагнитном поле: уравнения движения, сила Лоренца. Уравнения движения электромагнитного поля в присутствии зарядов и токов.

8. Закон сохранения энергии в электродинамике. Плотность энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля, вектор Пойнтинга. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

9. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения, потенциалы Лиенара-–Вихерта точечного заряда и соответствующие напряжённости полей. Электрическое дипольное излучение, угловое и частотное распределение его интенсивности.

УЧЕБНИКИ:

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Курс теоретической физики. Теория поля», т.2, Москва, Наука, 1988.
- Дж. Джексон, «Классическая электродинамика», Москва, Мир, 1965.
- Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, «Электродинамика. Фейнмановские лекции по физике», т.6, Москва, Мир, 1977.
- G. Giachetta, Luigi Mangiarotti, G. Sardanashvily «Advanced classical field theory», Singapore, World Scientific Publishing, 2009.
- В.С. Владимиров, «Обобщеные функции в математической физике», Москва, Наука, 1979.
- В.С. Владимиров, «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 1981.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Работа в семестре выражается оценкой

$$\text{НАКОП} = 0.6 \cdot \text{ЛИСТКИ} + 0.4 \cdot \text{КОНТРОЛЬНЫЕ}\,,$$

где «ЛИСТКИ» и «КОНТРОЛЬНЫЕ» — отнормированные на 10 баллов оценки за выполнение листков и контрольных (при этом, по каждому из этих пунктов можно получить и больше десяти баллов).

Если НАКОП (без учета округления) становится больше или равен 8, то студент может сразу получить эту оценку (округленную по стандартным правилам, до ближайшего целого; полуцелые округляются вверх) в ведомость.

Если НАКОП на дату проведения экзамена меньше 8, то оценка за курс вычисляется по формуле

$$\text{ОЦЕНКА} = 0.5 \cdot \text{НАКОП} + 0.6 \cdot \text{ЭКЗАМЕН}\,,$$

где «ЭКЗАМЕН» — оценка за экзамен, от 0 до 10 баллов (округление по тем же правилам, что и выше).

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Никаких специальных знаний по физике от слушателей курса не потребуется.

Контактная топология и инварианты Лежандровых узлов
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: П. Е. Пушкарь, И. А. Яковлев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: На семинаре мы затронем несколько тем из современной симплектической геометрии. Будут разобраны как классические, так и самые современные результаты. Семинар будет состоять из серий докладов, которые будут прочитаны лекторами, участниками и приглашенными докладчиками. Целью курса является овладение комбинаторными (выпуклые поверхности) и аналитическими (голоморфные отображения) техниками в контактной топологии.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Понимание материала семинара не предполагает никаких особенных знаний и доступно широкому кругу слушателей, ориентировочно начиная с третьего года обучения. Единственным переквизитом является знание дифференциальной геометрии в рамках любого стандартного курса.

ПРОГРАММА:

1. Стабильность в контактной топологии.
2. Классические инварианты Лежандровых узлов.
3. Перекрученные контактные структуры. $\mathfrak{h}$-принцип..
4. Тугие контактные структуры.Теория выпуклых поверхностей.
5. Алгебра Чеканова – Элиашберга 1 (комбинаторное определение, примеры вычисления).
6. Алгебра Чеканова – Элиашберга 2 (определение через голоморфные кривые, связь между аугментациями и заполнениями).

УЧЕБНИКИ:

1. McDuff, Salamon, Introduction to Symplectic Topology.
2. Geiges, An introduction to contact topology.
3. Honda Contact geometry notes.
4. Etnyre, Legendrian and Transversal Knots.
5. Etnyre, Ng Legendrian contact homology in $\mathbb{R}^3$.
6. Ekholm, Ng Legendrian contact homology in the boundary of a subcritical Weinstein 4-manifold.
7. Ekholm, Lekili Duality between Lagrangian and Legendrian invariants.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна $\min\bigl(10,\ \ 0.2\,(\text{за экзамен}) + 0.6\,(\text{за листочки}) + 0.8\,(\text{за доклад на семинаре})\bigr)$. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Линейное программирование
учебная дисциплина для студентов 2-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Линейное программирование — раздел теории оптимизации, изучающих специальный класс задач — нахождение экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и ставит своей целью осветить многообразие связей и приложений линейного программирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса

ПРОГРАММА:

1. Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства.
2. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.).
3. Элементы выпуклого анализа. Теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
4. Выпуклые многогранники. Крайние точки. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
5. Теорема о минимаксе.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
8. Симплекс-метод.
9. Другие алгоритмы (обзорно).
10. Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда – Фалькерсона.
11. Целочисленное линейное программирование.
12. Общая теорема о минимаксе*.
13. Непрерывная транспортная задача*. Метрика Канторовича – Рубинштейна*.

УЧЕБНИКИ: Основные учебники:

1. Evar D. Nering and Albert W. Tucker[1]. Linear Programs and Related Problems. (1993).
2. Robert J. Vanderbei. Linear Programming. Foundations and Extensions. (2001).
3. Пападимитроу Х., Стайглиц К., Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. 1982.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

Дополнительное чтение

1. Lovasz L., Plummer M., Matching theory. (1985)
2. Villani C., Topics in optimal transportation (2003).
3. Циглер Г., Выпуклые многогранники. МЦНМО (2014).

КОММЕНТАРИЙ: Для понимания некоторых (немногих) сюжетов курса желательно (но необязательно) знакомство с функциональным анализом.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из четырех листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле $E \cdot 0.4 + H \cdot 0.06$, где E — оценка за письменный экзамен (по 10-балльной шкале), а H — процент правильно решённых задач в течение семестра (округленный в сторону увеличения до числа, делящегося на 10). Для студентов, посещавших лекции в течение семестра, округление итоговой оценки производится в большую сторону, для посетивших менее половины лекций — в меньшую.

Математика для прагматика
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Хохлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Практическое использование математических конструкций неизбежно связано с конечностью и дискретностью, в то время как изучение Математики во многом опирается на описания непрерывных объектов; полезно знать, как именно реализуются некоторые непрерывные конструкции на практике: появление цифровых стандартов привело к тому, что обработка непрерывных во времени сигналов стала типовой задачей для программистов. В курсе будут рассмотрены примеры распространённых математических моделей в их дискретных и непрерывных вариантах, соответствие формул и взаимосвязь эффектов, характерных для каждого варианта. Примеры будут объединены в несколько отдельных сюжетов, предполагается, что для большинства примеров будут просчитаны визуальные интерпретации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии), плюс элементы функционального анализа (свойства пространств L_1, L_2 с примерами линейных операторов). Умение ориентироваться в библиотеках и написать несложный код на типовом интерпретаторе формул типа `python` (варианты: `R`, `Matlab`).

ПРОГРАММА:

1. Дифференциирование
   - Цифровая регистрация, импульсный базис и примеры искажений сигналов.
   - Оператор сдвига и его конечномерная модель, дифференцирование в дискретном времени и круговые частоты.
   - Формула замены координат от частотного базиса к импульсному и преобразование Фурье.
   - Быстрое преобразование Фурье и его версии для различных простых делителей. Идеи некоторых алгоритмов быстрого умножения
   - Предельные переходы, альясинг и связь с привычными из анализа формулами Фурье. Обобщения преобразования Фурье для функций пространства L_2 и обобщенных Функций
   - Частотные фильтры и их практическое построение (на уровне программного кода).
   - Теорема отсчетов Котельникова – Шеннона.
   - Преобразование Радона в $\mathbb{R}^2$ и компьютерная томография. Формулы обращения преобразования Радона.
   - Некорректные задачи и регуляризация решений.
   - Основные математические модели для реальных данных – связь со статистическими методами.
   - (Если будет время и интерес) Сигнал и шум, проблема отделения помех и теорема Шеннона. Что такое магнитно-резонансная томография: постановка задачи и алгоритмы.
2. Интегрирование
   - Принцип концентрации и его следствия.
   - Усреднение по множествам сигналов и интегрирование по множеству непрерывных функций на отрезке. Мера Винера и ее носители.
   - Практические модели естествознания, приводящие к интегрированию по функциональным пространствам.

- Свойства броуновских траекторий и примеры явных аналитических вычислений интегралов по броуновским траекториям. Связь интеграла по броуновским траекториям и интеграла Фейнмана.
- (Если будет время и интерес) Траектории случайного блуждания по решеткам размерностей 2, 3 и больше, ключевые отличия от одномерного случая. Связь с уравнениями математической физики.

3. Стохастический мир

- (при необходимости) Обзор некоторых методов вычислений в теории вероятностей — моменты, асимптотики, свойства смесей и т. п.
- Практические вычисления в стохастическом мире и что собственно можно проверить статистикой?
- Модели классической механики и марковские модели. Винеровский процесс и физическое броуновское движение.
- Стохастические уравнения, уравнение Ито и лемма Ито. Вычисления компьютерные и аналитические.
- Широкоупотребимые стохастические модели и представление их решений. Диффузионные уравнения.
- Стохастические интегралы и отличительная специфика формул стохастического мира от формул математического анализа.

УЧЕБНИКИ:

1. E. Candes «Elements of Modern Signal Processing» https://statweb.stanford.edu/~candes/teaching/math262/Lectures/

2. В. Зорич «Математический анализ задач естествознания»

3. G. Johnson, M. Lapidus. «The Feynman Integral and Feynman’s Operational Calculus»

4. С. Степанов. «Стохастический мир», https://www.twirpx.com/file/2483780/

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за итоговый экзамен и 50% за выполнение самостоятельных домашних работ.

Математика физических явлений
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс о связи реальных физических явлений и математических методов их описания, о возникновении определенных математических структур из законов физики, в первую очередь в механике, электростатике, электродинамике. В курсе обсуждаются такие вещи, как связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» по криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т.д

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно знание основ матанализа и понимание простых дифференциальных уравнений. Занятия рассчитаны скорее на студентов 2–3 курсов бакалавриата, но и подготовленные первокурсники не должны встретить серьёзных трудностей.

ПРОГРАММА:

1. Механика
   - Второй закон Ньютона — основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
   - От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
   - «Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
   - Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
2. Электростатика
   - Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля , дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
   - Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
   - Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.
3. Электродинамика
   - Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.
   - Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов.
   - Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир, 1967
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Физматлит, 1974
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика — М.: Физматлит, 2004
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студенты сдают задачи по двум спискам и отвечают на дополнительные вопросы. Начисление баллов следующее:

- N_1, от 0 до 10, за сданные в третьем модуле задачи
- Q_1, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в третьем модуле
- N_2, от 0 до 10, за сданные в четвёртом модуле задачи
- Q_2, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в четвёртом модуле
- W, от 0 до 5, за работу на занятиях.

Итоговая оценка $S = (N_1 + N_2 + Q_1 + Q_2 + W)/3$. Округление по стандартным правилам.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Математические основы квантовой механики
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Данный курс представляет собой введение в квантовую механику для студентов-математиков, не требующее серьёзной базы физических знаний. Квантовая механика является важнейшим инструментом для исследования явлений микромира и в настоящее время входит в обязательный образовательный минимум физиков-теоретиков и специалистов по математической физике. Модели квантовой механики послужили и продолжают служить источником вдохновения в открытии множества общезначимых и красивых конструкций и методов современной математики: в теории представлений групп и алгебр Ли, в функциональном анализе, в деформационном и геометрическом квантовании, теории квантовых групп и др.

Цель нашего курса — познакомить студентов-математиков с основными идеями и принципами квантовой механики и ее математическим аппаратом с иллюстрацией на достаточно простых и фундаментальных моделях.

В качестве материала для дальнейшего изучения квантовой механики и других разделов математической физики мы можем рекомендовать курс «Квантовая Механика» В. В. Лосякова и А. Г. Семенова (осенний семестр) в котором более подробно освещаются физические мотивировки и методы квантовой механики и обсуждаются современные теоретико-физические модели. Заинтересованным студентам стоит также обратить внимание на спецкурс по функциональному интегрированию, интегрируемым квантовым моделям и анзацу Бете и спецкурс по квантовым группам и R-матрице.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс рассчитан на студентов 3 – 4 года бакалавриата и магистрантов, не имеющих физического образования. Специальных знаний по физике не требуется, хотя знакомство с механикой и классической теорией поля облегчит восприятие материала. Математическая подготовка в объеме базовых курсов 1-го и 2-го года бакалавриата вполне достаточна: требуется владение основами алгебры, анализа и теории дифференциальных уравнений. Потребуются также первичные знания по теории представлений алгебр Ли, обобщенных функций, функционального анализа, статистики и теории вероятностей, которые, впрочем, будут вводиться на лекциях.

ПРОГРАММА:

- Краткий обзор основных физических проблем, приведших к возникновению квантовой механики. Гамильтонов формализм классической механики, фазовое пространство состояний механической системы и пуассонова структура на нем. Типы скобок Пуассона, теорема Дарбу.
- Основные понятия квантовой механики. Гильбертово пространство состояний квантовой системы, спектры самосопряженных операторов как множество значений квантовых наблюдаемых, статистическая интерпретация. Элементы теории обобщенных функций. Уравнения движения квантовой системы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.
- Гармонический осциллятор, его координатное представление и полиномы Эрмита. Алгебра операторов рождения и уничтожения и представление осциллятора в пространстве Фока. Общая теория одномерного движения.
- Трехмерное движение в центральном поле. Модель атома водорода. Сферические функции, полиномы Лаггера.
- Группы симметрий квантово-механических систем и их представления в пространстве состояний, законы сохранения и интегралы движения. Угловой момент в квантовой механике. Спин квантовой частицы. Конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

- Симметрическая группа и теория тождественных частиц. Статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака, типы симметрий векторов состояний и диаграммы Юнга. Принцип запрета Паули и объяснение периодического закона Менделеева.
- (*) Интегрируемые модели квантовой механики: спиновые цепочки, понятие об алгебраическом анзаце Бете.

УЧЕБНИКИ:

1. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, «Лекции по квантовой механике для студентов-математиков», Издательство ЛГУ, 1980.
2. Brian C. Hall, «Quantum Theory for Mathematicians», Graduate Texts in Mathematics 267, Springer 2013.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс равна

$$0.6\,(\text{накопленная оценка}) + 0.4\,(\text{оценка устного экзамена})\,,$$

где накопленная оценка равна $0.7\,(\text{Листки}) + 0.3\,(\text{Контрольные работы})$. Если накопленная оценка больше или равна 8, студент получает автомат за курс с этой оценкой.

Математические основы описания ранней вселенной
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: К. П. Зыбин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В курсе предполагается изложить современное состояние знаний о Вселенной. Будет обсуждаться: динамика «темной материи», приводящая к возникновению нелинейных структур, будет изложена теория инфляции вселенной, рассмотрена теория генерации спектра первичных флуктуаций.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, дифференциальные уравнения, ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Однородная и изотропная вселенная
2. Горячая вселенная, краткая тепловая история
3. Процессы образования первичного состава химических элементов
4. Неоднородности во вселенной, теория гравитационной неустойчивости
5. Теория инфляции
6. Теория инфляции

УЧЕБНИКИ:

1. V. Mukhanov. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge, www.cambridge.org/9780521563987.
2. Ф. Дж. Э Пиблс. Структура вселенной в больших масштабах. М.,: Мир, 1983.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.5 (доклад + работа на семинаре) + 0.5 (экзамен), округление до ближайшего целого, полуцелые значения округляются вверх.

Математическая теория игр и справедливое распределение
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: О. Р. Мусин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теорией игр называют математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Эта теория, возникшая в математике в 1940-х годах, чаще всего применяется в экономике. Целью курса является овладение математическими основами теории игр и задач справедливого распределения. В частности, будут рассмотрены задачи, связанные с равновесием Нэша и то как работает калькулятор справедливого распределения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

- Классические теоремы о неподвижных точках и их дискретные аналоги: теорема Брауэра, теорема Барсука – Улама, теорема Какутани, лемма Кнастера – Куратовского – Мазуркевича (ККМ)), лемма Шпернера, лемма Таккера.
- Обобщения теорем о неподвижных точках: «цветная» лемма Гейла, теорема Шепли KKMS, леммы Шпернера и ККМ с граничными условиями.
- Классификация игр. Седловая точка. Равновесие Нэша.
- Биматричные игры. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Доминирование по Парето и Парето оптимальное множество.
- Справедливое распределение. Справедливое разрезание торта и распределение n комнат в квартире между n жильцами.

УЧЕБНИКИ: не предполагается.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $P + \mathbf{min}(150, H + E) \,/\, 30$, где P это оценка за проект (доклад) на семинаре, оцененный по 5-бальной системе, а H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100 *$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач].

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс в форме учебно-научного семинара будет проходить на русском языке. Все студенты должны подготовить проект на заданную тему и сделать доклад. Проект оценивается по 5-бальной системе, т. е. составляет 50% от окончательной оценки.

Машинное обучение
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: И. В. Щуров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В 2019 году найдётся мало людей, которые бы не слышали о машинном обучении, но тех, кто понимает, что это такое, гораздо меньше. Машинное обучение используется в тех случаях, когда вам нужно научиться решать какой-то класс задач, для которого трудно написать явный алгоритм решения, но при этом можно найти множество примеров с правильными ответами. Так, невозможно представить себе написанный вручную алгоритм, который был бы способен отличить фотографию кошки от фотографии собаки, но если у вас есть достаточное количество фотографий тех и других, вы можете использовать машинное обучение, чтобы построить такой алгоритм автоматически.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра, математический анализ (одномерный и многомерный), теория вероятностей — слушателей не должны пугать слова «гиперплоскость», «градиент», «плотность вероятности» и «ковариационная матрица». Мы также будем программировать — основным языком на курсе будет `Python 3`, желательно знать библиотеки `numpy` и `pandas`.

ПРОГРАММА: В курсе мы будем обсуждать разные методы машинного обучения — начиная с линейных регрессий и деревьев решений и заканчивая современными нейросетевыми архитектурами. Мы начнём с теоретической основы каждого метода, посмотрим, как он работает на простых примерах, а затем перейдём к практической работе с реальными данными.

1. Обзор задач машинного обучения. Постановка задачи «обучения с учителем» (supervised learning). Метод k ближайших соседей. Проблема переобучения. Проклятие размерности.
2. Регрессии и классификаторы. Линейные модели. Регуляризация.
3. Методы оптимизации. Градиентный спуск и его модификации.
4. Решающие деревья. Бутстрап и бэггинг. Случайные леса. Градиентный бустинг.
5. Метод опорных векторов.
6. Нейронные сети и глубокое обучение.
7. Задачи «обучения без учителя» (unsupervised learning): оценка плотности, кластеризация, снижение размерности. Semi-supervised learning.
8. Другие задачи машинного обучения.

УЧЕБНИКИ:

- Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
- Murphy K. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется как средневзвешенное от оценки за текущую работу (40%), оценки за контрольную работу (30%) и оценки за экзамен (30%). Оценка за текущую работу формируется как среднее оценок за домашние задания и другие формы текущего контроля. В число домашних заданий могут быть включены соревнования по машинному обучению. Итоговая оценка округляется арифметически, остальные оценки не округляются.

КОММЕНТАРИЙ: Вы можете посмотреть на страницу курса 2018–19 учебного года:
http://wiki.cs.hse.ru/?curid=15880\}.

Методы сбора и анализа социологической информации
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. Я. Кирута.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Цели курса — представить разработку математических методов и моделей в социологии как перспективное поле деятельности для математиков, сформировать у студентов представление о современном состоянии математической социологии и привить им навыки решения наиболее актуальных задач в этой области. Особое место в интерпретации социальных фактов и прогнозировании социальной динамики занимает теоретическое объяснение наблюдаемого поведения людей, социальных групп и слоев: их предпочтений, выбора решений, ситуационных оценок и ожиданий, формирования социальных и деловых связей и способов взаимодействия в этих связях, конкуренции и сотрудничества, а также выражения мнений, социальных запросов и притязаний. В небольшом вводном курсе будут затронуты в основном четыре круга актуальных проблем в форме, доступной для тех студентов, на которых курс ориентирован. Во-первых, это математические модели поведения людей, объясняющие эмпирически наблюдаемые противоречия с традиционными представлениями о рациональности. Во-вторых, это модели и методы статистического анализа взаимодействия людей в социальных сетях. В-третьих, это проблемы моделирования общественного выбора и методы их решения. И, в-четвёртых, это методы моделирования, анализа и измерения социально-экономического неравенства.

ПРОГРАММА:

1. Основные представления о социальных структурах и процессах в современной социологии. Генезис идей: социальная математика — математическая социология — общий социальный анализ.

2. Методы математической статистики в социологических исследованиях. Специфические проблемы сбора и анализа социологической информации, связанные с отношением людей к социологическим обследованиям.

3. Парадоксы человеческого поведения и теоретических представлений о рациональности. Модель максимально правдоподобного выбора при вероятностном распределении предпочтений и проблема описания многогранника, вершины которого – это все транзитивные турниры на конечном множестве альтернатив.

4. Рациональная иррациональность при социальном вынуждении: логика выбора альтернатив из подмножеств («меню») конечного множества возможностей. Модели мотивации выбора в терминах булевых функций и полиномов и их преобразований Фурье на абелевой группе всех подмножеств конечного множества с операцией симметрической разности.

5. Принятие решений в условиях риска и неопределённости: единое объяснение парадоксов Аллэ, Элсберга и их последующих обобщений с помощью моделей ожидаемой степени предпочтения и субъективной вероятности при парных сравнениях возможных исходов выбора действий.

6. Введение в статистику социальных сетей в интернете. Асимптотики эволюции социальных сетей в моделях предпочтительного присоединения Барабаши – Альберт – Бианкони. Фазовые переходы сетевого неравенства: предельная конденсация Бозе – Эйнштейна в растущих социальных сетях.

7. Методы статистического анализа структуры реальных социальных сетей на основе неполных и частично искажённых статистических данных.

8. Моделирование и статистический анализ многослойных социальных сетей. Асимптотическое поведение растущей двуслойной социальной сети в модели Бианкони.

9. Введение в теорию стратегических игр. Дифференциация социальной активности в сетях: модель возникновения иерархического равновесия Нэша. Коалиционные равновесия, минимизирующие диаметр графа связей в сети.

10. Общие теоретико-игровые модели порождения социально-экономических сетей. Вычисление равновесий: процедура трассирования Харшаньи – Зелтена. Эволюционно стабильное равновесие. Байесовские игры с неполной информацией.

11. Формирование общественного предпочтения. Парадокс Эрроу, области Кондорсе, медианные алгебры, социальные порядки и медианные фильтры. Турнирные решения и функции общественного выбора с условиями согласованности и порядковой независимости от посторонних альтернатив.

12. Социально-экономическое неравенство. Стохастическое доминирование функций распределения, двойственность Фенхеля – Лежандра и функции Лоренца. Принцип передачи Пигу – Дальтона и теорема Харди – Литлвуда – Пойа.

13. Спектральная теория неравенства и «теоремы Шоке» в пространстве функций Лоренца. Парадоксы индексов неравенства, социальная депривация и дуальная модель оценки благосостояния с учетом неравенства.

14. Предпочтение неравенства и рынок социальных статусов по Гэри Беккеру.

15. Многомерные функции распределения: введение в теорию копул и её применения в анализе и прогнозировании социально-экономических явлений.

УЧЕБНИКИ: Курс построен на материалах научных статей и собственных разработках лектора. Все эти материалы, а также более или менее недавние англоязычные учебники, монографии и обзоры по темам курса будут рассылаться студентам по электронной почте в формате pdf. Кроме того, студентам будут рассылаться дополнительные материалы научных статей для самостоятельного изучения и подготовки докладов на семинарах и написания эссе. Студентам рекомендуется самостоятельно ознакомиться в интернете с материалами следующих журналов: Journal of Mathematical Sociology, Internet Mathematics Journal, Social Networks Journal, Journal of Complex Networks, Journal of Social Structure, Theoretical Economics, Social Choice and Welfare, Journal of Artificial Societies and Social Simulation.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка в десятибалльной шкале определяется в зависимости от взвешенной суммы оценок накопленных результатов и ответа на экзамене по формуле

$$\min\bigl(10, 0.6 \cdot (\text{накопленные результаты}) + 0.4 \cdot (\text{ответ на экзамене})\bigr) .$$

Накопленные результаты — это сумма баллов за выполненные упражнения, эссе и доклады на семинарах. Для каждого из упражнений и каждой из предлагаемых тем докладов будет указана начисляемая оценка в баллах, а эссе будет оцениваться в баллах от 0 до 7. Суммарная оценка накопленных результатов может превысить 16 баллов и тогда в сдаче экзамена не будет необходимости. Упражнения в форме домашних заданий будут рассылаться по электронной почте в формате pdf и их выполнение будет оцениваться по письменным ответам, присылаемым лектору по электронной почте.

Модулярные поверхности
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: А. М. Левин, О. В. Шварцман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория модулярных форм является областью математики с весьма почтенной историей и с неожиденными яркими новыми результатами. Модулярные кривые исследованы с практичеки с исчерпывающей полнотой, в то время как для модулярных поверхностей имеется много открытых вопросов. В XXI веке основная парадигма теории модулярных форм претерпела существенные изменения под влиянием концепции «moonshine» — программы, что привело к обилию новых вопросов методов и конструкций, в частности, в теории модулярных поверхностей.

В последнее время аспирантами ФМ НИУ ВШЭ были получены новые важные результаты которые, несомненно, заслуживают анализа полуклассической техникой адельной рефлизации

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знакомство с теорией модулярных кривых в объеме книги С. Ленга «Введение в теорию модулярных форм», М.: Мир, 1979.

ПРОГРАММА:

- Тело Зигеля ([M])
- Поверхности Гильберта ([EZ])
- Поверхности Якоби([[EZ])
- Модулярные дивизоры Хегнера. Примеры: Поверхности Гильберта в теле Зигеля
- Дивизоры компактификации. Примеры: Поверхности Якоби и тело Зигеля
- Адельная конструкция для модулярных кривых, интерпретация в ее терминах модулярных форм и точек Хегнера.

УЧЕБНИКИ:

[M] Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях.

[EZ] Martin Eichler, Don Zagier. The Theory of Jacobi Forms. Progress in Math, 1985.

[GG] Gerard van der Geer. Hilbert Modular Surfaces.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговыя оценка вычисляется по формуле $\mathbf{min}(150, H+E)\ /\ 15$, где H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100\,*$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач].

Операторы продолжения и усреднения на метрических компактах
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. В. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Основная цель курса – подробное, относительно элементарное и новое доказательство теоремы А. А. Милютина, которую в свое время сопровождали эпитетами «замечательная», «поразительная», «феноменальная» и т.п.: *Банаховы пространства* () *непрерывных функций на несчетных метрических компактах «не зависят» от . А именно, все они изоморфны пространству* () *непрерывных функций на канторовском множестве .*

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии

ПРОГРАММА:

- Базовые свойства канторовского множества. Критерии компактности подмножеств метрических пространств. Изоморфизмы банаховых пространств, дополняемые подпространства. Пространства непрерывных функций. Элементы теории размерности топологических и метрических пространств
- Проективная и иньективная универсальность канторовского множества. Иньективная универсальность гильбертова куба в классе компактов и пространства $C[0;1]$ в классе сепарабельных банаховых пространств. Принцип декомпозиции А. Пелчинского.
- Непрерывные разбиения единицы и теорема Дугунджи о продолжении. Топологии и метрики в пространствах вероятностных мер. Операторы усреднения и примеры их конструкций. Дополняемость $C(K)$ в $C(X)$ и $C(X)$ в $C(K)$. Милютинские отображения и их применения. Непрерывные селекции многозначных отображений.

УЧЕБНИКИ:

[BP] C. Bessaga, A. Pelczynski «Selected topics in infinite-dimensional topology» .

[Mi] J. van. Mill «Infinite-dimensional topology. Prerequisites and Introduction».

[КГ] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани, «Теоремы и задачи функционального анализа». item[**[RS]**]D. Repovs, P. Semenov «Continuous selections of multivalued mappings».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\mathbf{min}(150, H+E)\ /\ 15$, где H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100 *$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач]. Обратите внимание, что это отношение может быть больше 100. Таким образом, для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач, или другим способом набрать сумму $H+E=150$. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

Основные понятия математики
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. Некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики. Семинар позволит слушателям ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: Некоторые темы, обсуждаемые на семинаре (это заведомо не полный список, он может варьироваться от года к году):

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха–Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

УЧЕБНИКИ: Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000, http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: зависит от того, делал ли участник семинара доклад и от результата заключительной контрольной работы. Если участник семинара сделал успешный доклад, то он получает итоговую оценку 10 баллов и не должен писать заключительную контрольную. Если участник семинара доклада не сделал или доклад был очень неудачным, то итоговая оценка за семинар равна оценке за заключительную контрольную.

Основные приложения математики
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Где применяется математика, кроме самой математики?

- в физике
- в экономике
- в лингвистике
- в статистике
- в информатике
- в биологии

и это далеко не полный список! На нашем семинаре докладчики — специалисты в вышеперечисленных областях — расскажут о математических методах исследования, о применяемых моделях и как получать с их помощью выводы. Мы будем обсуждать математические проблемы, но не будем избегать и пограничных между математикой и предметной областью вопросов: как найти хорошее математическое описание проблемы? как проверить, соответствуют ли выводы действительности? Наша тема — взаимодействие математики и реальности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы первого года бакалавриата (анализ, алгебра, геометрия). Основная предполагаемая аудитория семинара — второкурсники.

ПРОГРАММА: Мы рассмотрим математические модели в таких областях, как

- физика (механика, электродинамика, квантовая теория)
- экономика
- лингвистика
- статистика (и анализ больших массивов данных)
- информатика (теория сложности, криптография)
- биология

и других. Доклады на семинаре будут делать приглашенные докладчики — специалисты в соответствующих предметных областях. Точные темы докладов будут определяться их пожеланиями.

УЧЕБНИКИ: Ввиду того, что доклады на семинаре имеют отношения к различным и мало связанным между собой областям знания, невозможно заранее предложить список литературы. Мы будем просить каждого докладчика рекомендовать книги и статьи для тех, кого заинтересовала тема доклада.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна оценке, полученной на устном экзамене. Для проведения устного экзамена студент беседует с одним из докладчиков, выступавших на семинаре в этом семестре (по собственному выбору, с согласия докладчика); беседа может включать решение задач и/или обсуждение предметной области. Результат беседы оценивается докладчиком по 10-балльной шкале.

Основы программирования на Python-2
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: В. Е. Иванникова.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящён практике программирования на языке Python. Мы решим много задач и так научимся основам разработки, попробуем современные инструменты аналитика и разработчика. При решении задач изучим некоторый продвинутый синтаксис Python (модули и пакеты, декораторы, генераторы и т.д.).

ПРОГРАММА: ищите на странице курса.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовое знание Python (условия, циклы, функции, классы), готовность работать в терминале и преодолевать трудности.

УЧЕБНИКИ:

1. Н. А. Ворожцов, А. В. Винокуров. Практика и теория программирования. Физматкнига 2008.
2. Документация языка Python https://docs.python.org/3/.
3. Б. У. Керниган, Р. Пайк. Практика программирования. Вильямс, 2017.
4. Micha Gorelick, Ian Ozsvald, High Performance Python, 2014.
5. Лучано Рамальо. Python. К вершинам мастерства. 2016.

КОММЕНТАРИЙ: страница курса 2019 года: http://wiki.cs.hse.ru/Основы_программирования_на_Python_весна_2019_матфак.

Основы эконометрики
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: И. Б. Воскобойников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Цель курса — расширение представлений студента-математика о роли математического аппарата теории вероятностей, математической статистики, математической экономики и ряда смежных разделов математики в современных экономических исследованиях. Для этого в курсе будут представлены базовые понятия теории вероятностей и экономической статистики, необходимые для аппарата эконометрики; изложена базовая теория эконометрических методов. Предполагается освоение подходов к решению типовых эконометрических задач, а также выработка практических навыков работы с экономическими данными и интерпретации результатов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знание основ теории вероятностей и математической статистики, а также математического анализа и линейной алгебры

ПРОГРАММА: В курсе будут представлены модели классической линейной регрессии, различные методы оценки параметров и их статистические свойства, проверка статистических гипотез и доверительных интервалов для параметров регрессии. Курс также содержит краткое введение в анализ временных рядов и панельных данных, можели с дискретными и смешанными зависимыми переменными.

УЧЕБНИКИ: Hill, R. Carter, W. E Griffiths, и G. C. Lim. Principles of Econometrics. 5-е изд. John Wiley & Sons, 2018.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов, набранных за промежуточную (15%) и итоговую (50%) контрольные работы, эмпирической домашней работы (30%), а также текущей работы на семинарах с выполнением небольших домашних заданий (5%). Каждый вид работы оценивается количеством баллов от 0 до 100. Итоговая оценка получается как среднее взвешенное с весами, указанными в скобках. Итоговая оценка округляется до ближайшего наибольшего целого числа. Например, итоговый балл 5,01 округляется до 6.

КОММЕНТАРИЙ: Курс предполагает освоение основ работы с эконометрическим пакетом STATA.

Прикладные методы анализа
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: С. М. Хорошкин, Х. С. Ниров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 5 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Аналитические методы, используемые в решении приходящих из математической физики задач, вбирают в себя как традиционную технику университетских курсов анализа, алгебры и дифференциальных уравнений, так и более абстрактные приемы функционального анализа. Цель курса — ознакомить с идеологией применения аппарата обобщенных функций, интегральных преобразований, фундаментальных решений, асимптотических оценок и др. Форма занятий в значительной части основана на самостоятельном решении задач студентами. Этот же курс под названием «Математические методы естествознания» является обязательным для студентов русскоязычной магистерской программы «Математика и математическая физика» обучающихся по профилю «Математическая физика».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения в объеме 1-2 курса.

ПРОГРАММА:

1. Функции Грина краевой задачи и задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Дифференциальные уравнения с комплексным временем. Преобразование Лапласа.
3. Обобщенные функции.
4. Преобразование Фурье обобщенных Функций.
5. Фундаментальные решения классических операторов второго порядка. Приложения к задачам математической физики.
6. Асимптотические оценки и асимптотические разложения.

УЧЕБНИКИ:

1. Владимиров В. С., Уравнения математической физики
2. Гельфанд И. М, Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними
3. Эрдейи А., Асимптотические разложения
4. Погребков А. К. Записи лекций https://math.hse.ru/mathmethods2016
5. Лосяков В. В. Записи лекций https://math.hse.ru/data/2018/01/15/1160394242/MathminThPh.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка вычисляется по формуле

$$0,2\,x + 0,7\,y + 0,3\,z + 0,2\,u\,,$$

где x — средняя оценка за короткие контрольные раборы на семинарах, y — средняя оценка за три домашних контрольных работы, z — оценка за итоговый экзамен, u — бонус за активную работу на занятиях.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс является обязательным для студентов магистратуры, обучающихся по профилю «Математическая Физика», и входит в официальный РУП под названием «Математические методы естествознания». Все остальные студенты, включая студентов бакалавриата, могут взять этот курс в качестве спецкурса по выбору.

Проективная алгебраическая геометрия
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара — рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

1. Задачи, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, и др.
2. Задачи евклидоваой и других геометрий: решение средствами проективной геометрии.
3. Теорема Безу, индексы пересечения, правила Цейтена.
4. Поляры, гессианы, принцип двойственности.
5. Линейные ряды, линейные сечения и проекции, раздутия, джойны, мультисеканты, проективные касательные пространства к многообразиям.
6. Поверхности дель Пеццо, нормmногообразия, квадрики.
7. Детерминантали, многообразия Сегре, Веронезе, их многообразия хорд.
8. Грассманианы, многообразия флагов, индукционная процедура построения грассманианов.
9. Многомерные конфигурации прямых.
10. Замыкания Понселе и задачи классификации векторных расслоений.
11. Пространства «полных» квадрик, «полных» треугольников и задачи исчислительной геометрии.

УЧЕБНИКИ:

1. I. V. Dolgachev. Classical algebraic geometry: a modern view. Cambridge, 2011.
2. M. Beltrametti et al. Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry. European Math. Soc., Zuerich, 2009.
3. J. G.Semple, J. T. Kneebone. Algebraic projective geometry. Oxford, 1963.
4. J. G. Semple, L. Roth. Introduction to algebraic geometry. Oxford, 1949.

5. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, М., Высшая школа, 1963.

6. Х. С. М. Кокстер. Действительная проективная плоскость. М., Физматгиз, 1959.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

”

Распределение простых чисел
НИС на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Б. Калмынин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Множество простых чисел и его свойства, такие как распределение простых чисел в коротких интервалах и арифметических прогрессиях, играет большую роль в современной теории чисел, поскольку простые числа являются «строительным материалом» для всех целых чисел. Курс «Распределение простых чисел» будет посвящен различным результатам о простых числах, начиная с самых классических, таких как асимптотический закон распределения простых чисел и его связь с гипотезой Римана, и заканчивая более современными и технически сложными, такими как теорема Виноградова о сумме трёх простых чисел или результат Хиз – Брауна о бесконечности пар чисел-близнецов в ситуации, когда существуют нули Зигеля. Мы также коснемся вопросов о простых числах в коротких интервалах и полиномиальных последовательностях, попутно изучив основы методов решета и другие методы аналитической теории чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: ТФКП (основные свойства голоморфных функций, интегральная формула Коши, принцип максимума модуля, теорема Вейерштрасса о факторизации), анализ (O-нотация, интегрирование Лебега – Стилтьеса, основы анализа Фурье), алгебра (фундаментальная теорема арифметики, понятие числового поля и его кольца целых).

ПРОГРАММА:

1. Суммирование арифметических функций, ряды Дирихле, формула Перрона.
2. Дзета-функция Римана, L-функции Дирихле, асимптотический закон распределения простых чисел, простые в арифметических прогрессиях, гипотеза Римана, теорема Зигеля – Вальфиша, нули Зигеля.
3. Методы решета: решето Эратосфена, теорема Бруна, формула Виноградова для функции Мангольдта и оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами.
4. Всякое достаточно большое натуральное число есть сумма трёх простых чисел. Числа вида $n^2 - 1$ и $n^2 + 1$ с малым количеством простых делителей. Теорема Романова.
5. Гладкие числа, простые числа в коротких интервалах и теорема Ранкина о больших промежутках между простыми числами. Неравномерности в распределении простых чисел. Числа-близнецы и нули Зигеля.

УЧЕБНИКИ:

1. К. Прахар. «Распределение простых чисел» https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Prahar1967ru.pdf
2. T. Tao. «Analytic prime number theory», Math 254A course, https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/
3. Д. Р. Хиз-Браун «Lectures on sieves», arXiv:math/0209360

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10,\ 0.3\,(\text{problem sets (max 10pts)}) + 0.7\,(\text{talk (max 12pts)}))$.

”

Семинар по симплектической геометрии, квантовым когомологиям и категориям Фукая
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Л. Кацарков, Л. А. Суханов, И. А. Яковлев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: На семинаре мы затронем несколько тем из современной симплектической геометрии. Будут разобраны как классические, так и самые новые результаты. Семинар будет состоять из серий докладов, которые будут прочитаны лекторами, участниками и приглашёнными докладчиками.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Дифференциальная геометрия и топология, начала симплектической геометрии.

ПРОГРАММА: Некоторые из тем, которые мы возможно затронем на семинаре

1. Введение в Вайштейновы многообразия.
2. h-принцип для перекрученных контактных структур и незатянутых лежандровых узлов.
3. Контактные гомологии. Заполнения.
4. Симплектические когомологии. Формула приклеивания ручки.
5. Заполнения контактных многообразий и их классификация.
6. Скрученная категория Фукая.

УЧЕБНИКИ:

- Д. Макдафф, Д. Саламон. Введение в симплектическую топологию.
- Арнольд, Гивенталь. Симплектическая геометрия.
- Cilebak. Eliashberg From Stein to Weinstein and Back.
- Geiges. An introduction to contact topology.
- Ozbagci. Stipsicz Surgery on Contact 3-Manifolds and Stein Surfaces.
- Seidel. Fukaya categories and Picard – Lefschetz theory.
- Wendl. Lectures on Symplectic Field Theory.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка зависит от активности участия студента в семинаре.

Системы корней и их приложения
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: К. Г. Куюмжиян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Системы корней — это замечательные комбинаторные объекты, дающие ответы на самые разные алгебраические и геометрические вопросы, такие как классификация правильных многогранников и групп, порождённых отражениями, описание представлений алгебр Ли и колчанов, классификация особенностей и многие другие.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, геометрии и комбинаторики).

ПРОГРАММА:

- Аксиоматическое построение систем корней.
- Касательные алгебры классических групп и системы корней.
- Системы корней и исключительные группы
- Основные понятия алгебр Ли. Представления алгебр Ли.
- Решётки корней и весов, представления со старшим весом. Построение множества весов неприводимого представления с заданным старшим весом.
- Колчаны. Представления колчанов. Теорема Габриеля.
- Если позволит время. Системы корней и особенности многообразий на простейших примерах.

УЧЕБНИКИ:

- Дж. Хамфрис, «Введение в теорию алгебр Ли и их представлений»
- Дж. Адамс, «Лекции по группам Ли»
- Brian C. Hall, «Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction»
- У. Фултон, Дж. Харрис, «Теория представлений. Начальный курс»
- Ж.-П. Серр, «Алгебры Ли и группы Ли»
- Р. Пирс, «Ассоциативные алгебры»
- Ю.Г. Прохоров, «Особенности алгебраических многообразий»
- программа Lie http://young.sp2mi.univ-poitiers.fr/~marc/LiE/
- http://doc.sagemath.org/html/en/reference/combinat/sage/combinat/root_system/__init__.html

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.6 Накоп + 0.4 Экз, Накоп вычисляется на основании листков.

Современные проблемы математической логики
НИС для студентов 2-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, Л. Д. Беклемишев, В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика представляет собой широкий спектр дисциплин, движимых интересом к основаниям математики, а также множеством различных приложений в таких областях как информатика, лингвистика и философия. Данный научно-исследовательский семинар призван познакомить слушателей с различными задачами и проблемами современной математической логики, показать как классические результаты, так и продвижения последнего времени в данной области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знание основ логики и теории множеств.

ПРОГРАММА: Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т.п. Возможные темы докладов:

- эпистемические логики
- циклические выводы в модальной мю-логике
- формальная арифметика и вторая теорема Гёделя о неполноте
- логика доказуемости
- генценовское доказательство непротиворечивости формальной арифметики
- теоремы Шаврукова об алгебрах доказуемости формальных теорий
- интуиционистская логика
- теоремы Руитенбурга для интуиционистской логики
- игровая семантика для модальной логики Гжегорчика
- теорема Зиглера о неразрешимости некоторых теорий полей
- элементы теории типов
- циклические и нефундированные выводы в арифметике Пеано.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.
- Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Если участник сделал доклад, то его накопленная оценка — 10. Если нет — оценка равна оценке за итоговый коллоквиум.

КОММЕНТАРИЙ: Хоть семинар и рассчитан на студентов второго курса и старше, в нём вполне могут принять участие и заинтересовавшиеся тематикой первокурсники.

Спектральные последовательности в топологии
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: С. А. Абрамян .

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Вычисление гомотопических групп сфер было одной из главных задач алгебраической топологии второй половины двадцатого века. Целью курса является знакомство слушателей с классическими достижениями в этой области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: владение понятиями (ко)гомологий и гомотопических групп.

ПРОГРАММА:

1. Расслоения и гомотопические группы.
   - Расслоения. Длинная точная последовательность гомотопических групп.
   - Расслоение Хопфа. Profit: $\pi_3(S^2)$.
   - Связь гомотопических групп и гомологий: теоремы Пуанкаре и Гуревича.
2. Спектральные последовательности
   - Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Точные пары.
   - Спектральная последовательность расслоения. Теорема Лере – Серра.
   - Мультипликативная структура когомологической спектральной последовательности. (Без доказательства.)
3. Вычисления
   - Кольцо когомологий $H^*\big(U(n)\big)$, $H^*\big(BU(n)\big)$. Характеристические классы.
   - Несколько точных последовательностей: последовательности Серра, Гизина, Вана.
   - Теорема Гуревича. Теорема Фрейденталя. Теорема вырезания для гомотопических групп.
   - Классы Серра. Теоремы Гуревича и Уайтхеда mod$\mathcal{C}$.
   - Метод Серра вычисления гомотопических групп сфер.
4. Когомологические операции
   - Представимость когомологий.
   - Когомологические операции, как $[K(G,n), K(H,m)]$, или зачем считать $H^*\big(K(G,n), H\big)$.
   - Опеределение и основные свойства операций и квадратов Стинрода.
   - Конструкция Стинродовых квадратов. Трансгрессия.
   - Теорема Бореля. Когомологии $H^*\big(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p\big)$ и $H^*\Big(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p\Big)$. (С доказательством для $p = 2$.)
   - Алгебра Стинрода.
   - Метод Серра вычисления гомотопических групп сфер (продолжение).

УЧЕБНИКИ:

- М. Атия. Лекции по K-теории.

- Дж. Милнор, Дж. Сташефф. Характеристические классы.
- Дж. Милнор. О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. http://www.mathnet.ru/links/75cdd6a28212a9d387f7b6c821f16cb6/mat16.pdf.
- Дж. Мак-Клири. Путеводитель по спектральным последовательностям.
- А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\min(10, 0.4(H+M+E))$, где H — оценка за листки, M — оценка за контрольную в середине семестра, а E — оценка за финальный экзамен.

Стохастический анализ с приложениями в финансах
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В курсе обсуждаются основы теории случайных процессов, техника стохастического интегрирования с приложениями к теории арбитража.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, теория вероятностей.

ПРОГРАММА:

1. Моделирование финансовых активов. Базовые факты из теории вероятностей (обзорно). Моменты и кумулянты. Важные семейства распределений. Центральная предельная теорема. Безгранично делимые распределения. Теорема Леви – Хинчина. Корреляции и копулы. Основные модельные процессы. Винеровский процесс. Процессы Леви. Дробное броуновское движение.

2. Теория арбитража для дискретного времени. Опционы и другие ценные бумаги. Одношаговая биномиальная модель. Многошаговая биномиальная модель и формула CRR. Элементы теории мартингалов (дискретное время). Выпуклые множества. Теорема об отделимости. Первая фундаментальная теорема. Полнота рынка. Вторая фундаментальная теорема. Модель CRR и сходимость к модели Блэка – Шоулза. Мартингалы и моменты остановки.

3. Модели с непрерывным временем. Мартингалы. Марковские моменты, неравенства. Стохастический интеграл. Стохастический интеграл как мартингал. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Уравнение теплопроводности. Марковское свойство решений СДУ. Уравнение Колмогорова. Теорема Гирсанова. Модель Блэка – Шоулза.

УЧЕБНИКИ:

1. Elliot R.J., Kopp P.E., Mathematics of financial markets, 2004.

2. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. М.: «Мир», 2003

3. Wilmott P., Paul Wilmott On Quantitative Finance. J. Wiley&sons, 2006.

4. Bouchaud J.-P., Potters M., Theory of financial risk. CUP, 2000.

5. Bougerol F., Modeles stochastique et application a la finance.
http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/bougerol/M1_15_16.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из двух листков (по 5 задач в каждом). Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по формуле $0.4E + 0.6H$, где E — оценка за письменный экзамен, а H — процент правильно решённых задач в течение семестра. Для студентов, посетивших более половины лекций, округление производится в большую сторону, для прочих — в меньшую.

Суммы характеров
НИС на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Б. Калмынин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Многие вопросы теории чисел приводят к изучению сумм мультипликативных функций на множестве натуральных чисел. Один из самых простых и в то же время содержательных примеров — это периодические мультипликативные функции, то есть характеры Дирихле. Курс «Суммы характеров» будет посвящен изучению оценок для сумм характеров Дирихле по различным множествам и их применениям в других задачах теории чисел. Мы получим оценки для сумм характеров Дирихле при помощи тригонометрических сумм и свяжем получающиеся оценки со свойствами соответствующих L-функций. Также мы обсудим связь сумм характеров с распределением квадратичных вычетов по модулю больших простых чисел, оценки для наименьшего квадратичного невычета и наименьшего простого квадратичного вычета, метод большого решета и его приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: ТФКП (основные свойства голоморфных функций, интегральная формула Коши, принцип максимума модуля, теорема Вейерштрасса о факторизации), анализ (O-нотация, интегрирование Лебега – Стилтьеса, основы анализа Фурье), алгебра (фундаментальная теорема арифметики, понятие числового поля и его кольца целых).

ПРОГРАММА:

1. Характеры Дирихле, их разложения Фурье и L-функции, квадратичный закон взаимности. Значения L-функций Дирихле в $s = 1$ и квадратичные поля. Числа классов и эллиптические кривые.

2. Неравенство Пойа – Виноградова и его приложения. Обобщенная гипотеза Римана, условные оценки для сумм характеров. Нижние оценки для сумм характеров.

3. Точки на кривых над конечным полем, метод Степанова и оценка Бёрджесса. Наименьший квадратичный невычет.

4. Суммы по простым и сдвинутым простым числам, наименьший простой квадратичный вычет и наименьший примитивный корень. Метод большого решета и теорема Линника о наименьшем квадратичном невычете. Другие приложения большого решета.

УЧЕБНИКИ:

1. T. Tao, «Analytic prime number theory», lecture notes of Math 254A course https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/

2. Noam D. Elkies' Analytic Number Theory lecture notes (Harvard University, Spring 1998) http://www.math.harvard.edu/~elkies/M259.98/index.html

3. A. Strombergsson, «Analytic number theory — Lecture notes based on Davenport's book», http://www2.math.uu.se/~astrombe/analtalt08/www_notes.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min\bigl(10,\ 0.4\,(\text{problem sets (max 10 pts)}) + 0.6\,(\text{talk (max 12pts)})\bigr)$.

ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ КАК ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ И АРИФМЕТИКУ
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: В. А. ГРИЦЕНКО.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Линейная алгебра и теория многочленов над полем из двух элементов немедленно приводят нас к таким математическим объектам, как конечная плоскость Фано, грассманиан конечномерного пространства, лагранжиан (ортогональное себе подпространство), расширение поля F2, простая линейная группа GL3(F2) из 168 элементов. Теория кодирования тесно связана с теорией Галуа конечных полей, с классическими линейными и спорадическими простыми группами. Кроме собственно приложений к информатике коды позволяют строить замечательные арифметические объекты, а именно целочисленные квадратичные решетки: E8, решетка Лича, решетки Нимейера. В курсе мы продемонстрируем тесную связь алгебры, арифметики и комбинаторики на базе задач теории кодирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые знание по алгебре: конечномерное линейное пространство, кольцо многочленов, факторгруппа, факторкольцо, квадратичная форма.

ПРОГРАММА: Линейные коды и их дуальные коды как объекты линейной алгебры над конечными полями. Метрика Хэмминга. Соотношения ортогональности. Конечная проективная плоскость Фано и совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга. Целочисленные решетки An и Dn и их системы корней. Группа Вейля системы корней. Целочисленные решетки и их конечные дискриминантные группы. Максимальные решетки и расширения четных целочисленных решеток, в частности, решеток корней Бинарный код Хэмминга и четная унимодулярная решетка E8. Тернарный код Хемминга и решетка E6. Унимодулярные решетки ранга 16 и 24. Совершенные коды. Код Голлея и решетка Нимейера N(24A1). Конечные поля и неприводимые многочлены на конечными полями. Введение в теорию Галуа конечных полей, автоморфизм Фробениуса. Неприводимые многочлены над конечным полем. Идеалы и циклические коды. Круговой многочлен над конечным полем. Оценка минимальной длины циклического кода. Вычетно-квадратичные коды и новое построение кодов Хэмминга и Голея. Решетка Лича и плотные упаковки евклидового пространства. Краткое введение в тета-функции и производящие функции кодов.

УЧЕБНИКИ: W. Ebeling, Lattice and Codes. Vieweg 1994.

J.H. van Lint, Introduction to coding theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 86, Springer-Verlag, New York etc., 3ed edition, 1999.

J. H. Conway and N. J. A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999. (русский перевод: Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Мир, Том 1, 2, 1990.)

Noam D. Elkies, Lattices, Linear Codes, and Invariants, Part I. II, Notices of the AMS vol 47 (2000), N 10–11.

G. Nebe, E. M. Rains and N. J. A. Sloane, Self-dual codes and invariant theory , Springer-Verlag (2006).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.2 * Индивидуальная работа + 0.3 * Письменное решение дополнительных задач + 0.5 * Устный колоквиум (или решение теоретических задач)

Теория Морса
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: П. Е. Пушкарь.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория Морса изучает связь между топологией многообразия и свойствами критических точек функций на этом многообразии, и находит применение в самых разных математических задачах.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический Анализ первого года, линейная алгебра и начала топологии

ПРОГРАММА:

- Гладкие функции и многообразия.
- Лемма Морса.
- Теорема о приклейке клетки.
- Комплекс Морса.
- Неравенства Морса.
- Теория Морса на многообразии с краем.
- Теория Морса – Формана.
- Немного о теории Морса и инвариантах лежандровых узлов.
- Теорема об h-кобордизме.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Экзамен

Теория представлений
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Л. Г. Рыбников, Б. Л. Фейгин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён разбору разных сюжетов из теории представлений полупростых алгебр Ли, алгебры Вирасоро, аффинных алгебр Каца – Муди, квантовых групп и родственных им алгебр. Представления перечисленных алгебр играют центральную роль в конформной теории поля, интегрируемых системах, перечислительной геометрии, маломерной топологии и других разделах математики. Предполагается, что каждый участник семинара какую-то часть программы разберёт самостоятельно и расскажет на семинаре.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы алгебры, топологии и групп и алгебр Ли.

ПРОГРАММА:

- Представления полной линейной группы: двойственность Шура – Вейля.
- Тензорная категория представлений полной линейной группы.
- Алгебра $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ и ее представления.
- Приложения квантовой группы к инвариантам узлов и зацеплений.
- Пространство Фока как представление алгебры Гейзенберга и Вирасоро.
- Аффинные алгебры Каца – Муди и их представления.
- Конструкция Шугавары.
- Фьюжн-произведение.

Более конкретный список тем зависит от возможностей участников.

УЧЕБНИКИ: по личной договорённости.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,8 *$ (участие) $+ 0,2 *$ (доклад).

Терия пучков
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: Н. С. Маркарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория пучков является стандартным инструментом изучения локальных объектов на различных многообразиях и получения с их помощью глобальных инвариантов рассматриваемых многообразий. Она является хорошей мотивацией для изучения гомологической алгебры. Мы познакомимся с основными понятиями теории пучков и их когомологий, и постараемся выучить все необходимые для этого определения и теоремы из гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три семестра стандартных курсов алгебры, анализа, геометрии, топологии и спецкурс «Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру».

ПРОГРАММА:

- Пучки на топологических пространствах. Слои, этальное пространство предпучка, опучковывание. Прямой и обратный образ. Абелевы пучки.
- Комплексы и гомологии. Длинная точная последовательность и спектральная последовательность. Абелевы категории.
- Глобальные сечения, вялые пучки, резольвента Годемана. Когомологии пучков и гиперкогомологии комплексов пучков. Когомологии Чеха.
- Тонкие и мягкие пучки. Пучок дифференциальных форм на гладком многообразии: лемма Пуанкаре и теорема Де Рама.
- Высшие прямые образы пучков, спектральная последовательность Лере.
- Сечения и когомологии с компактными носителями.
- Когерентные пучки в алгебраической геометрии и их геометрические приложения.
- Категории, функторы, предпучки на категории, лемма Ионеды, сопряжённость и (ко) пределы.
- Топологии Гротендика, пучки на сайтах, теория спуска.

УЧЕБНИКИ:

- B. Fantechi et al, Fundamental algebraic geometry: Grothendieck's EGA explained, Part 1.
- Р. Хартсхорн, Алгебраическая геометрия.
- B. Iversen, Cohomology of Sheaves, parts I-III.
- C. A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Топология алгебраических многообразий
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: С. М. Гусейн-Заде.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Целью курса является знакомство с топологией комплексных (алгебраических) многообразией в аффинных или в проективных пространствах. Основное внимание будет уделено их группам гомологий. Будут обсуждены основы теории Пикара-Лефшеца, описан топологический тип гиперповерхности около изолированной особой точки задающего его уравнения (теорема Милнора), вычисление топологических инвариантов критической точки функции, топологический тип полного пересечения около изолированной особой точки задающей его системы уравнений, группы гомологий неособых проективных гиперповерхностей, неособых проективных полных пересечений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знакомство с основами (на уровне понятия) теории гладких многообразий и теории гомологий. Впрочем, все необходимые сведения будут напомнены.

ПРОГРАММА:

1. Простейшие свойства комплексных многообразий.
2. Комплексные проективные многообразия и их гиперплоские сечения.
3. Локальное многообразие уровня функции около критической точки. Локальное многообразие уровня функции около невырожденной критической точки.
4. Гомотопический тип локального многообразия уровня функции около изолированной критической точки (теорема Милнора).
5. Вычисление инвариантов изолированной критической точки функции.
6. Гомотопический тип полного пересечения около изолированной критической точки определяющей его системы уравнений.
7. Проективные комплексные гиперповерхности и их группы гомологий.
8. Проективные полные пересечения и их группы гомологий.
9. (Возможное (при наличии времени) продолжение. Эквивариантные версии обсуждаемых понятий, в частности, группы гомологий неособых гиперповерхностей, инвариантных относительно действий конечных групп.)

УЧЕБНИКИ:

1. Дж.Милнор. Теория Морса. Мир, 1965.
2. Дж.Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Мир, 1971.
3. V.A.Vassiliev. Applied Picard–Lefschetz theory. Math. Surveys Monogr., 97, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, Chapter I.
4. В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. МЦНМО, 2009 г., Глава IV.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Сумма баллов за решение задач в течение курса и баллов за экзамен (поровну).

Функциональный интеграл
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода. На примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях данного подхода, таких как физика полимеров, квантовая механика, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы анализа, ТФКП, теории вероятностей, классической механики. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика, квантовая механика.

ПРОГРАММА:

1. Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы.
2. Производящий функционал. Марковский (δ-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
3. Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла.
4. Вычисление простейших функциональных интегралов.
5. Броуновское движение и Винеровский интеграл.
6. Связь с уравнением Фоккера – Планка, исчислениями Ито и Стратоновича.
7. Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
8. Приближенное вычисление функционального интеграла.
9. Применение функционального интеграла в квантовой механике, физике полимеров и финансовой математике.
10. Дальнейшее развитие идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.

2. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.

3. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.

4. Семенов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и математ. физика 2016 Т. 187 №. 2 с. 350–359.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $0.7\,H + 0.3\,E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. В. КУДИНОВ.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика изучает основания математики, принципы построения формальных математических теорий и их свойства, а также теорию алгоритмов. Математическая логика, является необходимой базой для изучения любой другой математической дисциплины. Понимание основных принципов, возможностей и ограничений формального построения математической теории позволяет более глубоко понять многие теоремы алгебры, математического анализа, топологии и других математических дисциплин. Освоение формального языка математики позволит более четко формулировать утверждения и не совершать ошибок в рассуждениях. Целью курса является овладение основными понятиями исчисления высказываний, исчисления предикатов и неклассических логик (интуиционистской и модальной), а также приобретение навыков работы с формальными аксиоматическими системами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы формулы, индуктивное определение. ДНФ, КНФ, теорема Поста.
- Тавтологии и эквивалентности. Аксиомы исчисления высказываний. Формальное определение вывода, как математической модели доказательства. Теорема о дедукции. Противоречивость.
- Независемость аксиомы исключенного третьева и многозначная логика.
- Теорема о полноте исчисления высказываний.
- Логика предикатов. Понятие термы и формулы, модели.
- Изоморфизм и автоморфизм модели. Доказательство невыразимости.
- Элиминация кванторов.
- Аксиомы и правила вывода логики предикатов. Корректность и полнота.
- Интуиционистская логика: аксиоматика, семантика Крипке, полнота.
- Модальная логика: аксиоматика, семантика Крипке, полнота.

УЧЕБНИКИ:

[B] Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств.» М.: МЦНМО, 2012.

[G] Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления.» М.: МЦНМО, 2012.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $0,6H+0,4E$, где H — средняя оценка за домашние задания, E — оценка за устный экзамен.

Уравнения с частными производными
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОР: С. В. ШАПОШНИКОВ.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Огромное число физических, геометрических, вероятностных задач приводят к построению и исследованию решений уравнений с частными производными, причем важнейшую роль в таких исследованиях играют идеи и методы функционального анализа. В настоящем курсе мы не только познакомимся с типичными примерами уравнений и методами их решений, но и обсудим пространства Соболева и теорию полугрупп операторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра и математический анализ

ПРОГРАММА:

1. Уравнения с частными производными в физических, геометрических и вероятностных задачах.
2. Волновое уравнение. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа. Распространение волн.
3. Обобщенные функции и обобщенные производные. Преобразование Фурье. Фундаментальное решение оператора Лапласа, оператора теплопроводности, оператора Даламбера.
4. Пространства Соболева. Неравенства Соболева и теоремы вложения.
5. Теоремы Рисса и Лакса – Мильграма, априорные оценки и продолжение по параметру. Разрешимость краевых задач для эллиптических и параболических уравнений.
6. Принцип максимума для классических и соболевских решений. Альтернатива Фредгольма.
7. Качественные свойства решений эллиптических и параболических уравнений: теоремы о среднем, неравенство Харнака, гёльдеровость соболевских решений, поведение решений на бесконечности.
8. Неограниченные операторы. Задача Штурма – Лиувилля. Расширение по Фридрихсу оператора Лапласа. Теорема Гильберта – Шмидта и обоснование метода Фурье.
9. Полугруппы. Теорема Хилле – Иосиды. Свойства тепловой полугруппы и полугруппы Орнштейна – Уленбека.
10. Нелинейные уравнения. Теоремы о неподвижной точке. Монотонные операторы. Вариационные методы. Разрушение решений.

УЧЕБНИКИ:

1. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Series in Mathematics, vol. 96. American Mathematical Society, 2008.
2. Evans L.C. Partial Differential Equations: second edition. Graduate Series in Mathematics, vol. 19.R. American Mathematical Society, 2010.
3. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е издание, исправл. и дополн. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс складывается из накопленной оцени (Н) и оценки за экзамен (Э) по формуле: $0.6\,(\text{Н}) + 0.4\,(\text{Э})$. Накопленная оценка складывается из оценок за две контрольные и коллоквиум по формуле: $0.2\,(\text{кр}1 + \text{кр}2) + 0.6\,(\text{коллоквиум})$. Экзамен проходит в устной форме, экзаменационный билет состоит из теоретического вопроса и задачи. Итоговая оценка, оценка за экзамен, накопленная оценка и оценки за контрольные и коллоквиум выставляются по 10-балльной шкале. Округления производятся по стандартному арифметическому правилу.

Характеристические классы
учебная дисциплина для студентов 3-го курса и старше

ЛЕКТОРЫ: М. Э. Казарян, А. С. Хорошкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Векторные расслоения являются объектом исследования в математике и её приложениях. Локально они выглядят, как векторное пространство и потому отличаются только размерностью. Однако глобально они могут иметь довольно сложную топологическую структуру. Характеристические классы служат препятствием для тривиальности расслоения. Они перерабатывают информацию о расслоении в форме когомологических классов. Характеристические классы являются эффективным и красивейшим инструментом, возникающим в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, арифметической геометрии, дифференциальной геометрии и даже математической физике. Например, характеристические классы могут различать касательные расслоения к различным гладким структурам на одном и том же топологическом многообразии и помогают отвечать на такие вопросы, как количество прямых лежит на общей кубической поверхности в $\mathbb{CP}_3$.

Курс является продолжением курса по алгебраической топологии с приложениями в алгебраической и арифметической геометриях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Требуется знакомство с гладкими многообразиями, базовыми курсами алгебры, топологии, анализа и алгебраической топологии

ПРОГРАММА:

1. Понятие Характеристического класса
2. Двойственность Пуанкаре, гомоморфизм Гизина и изоморфизм Тома
3. Классифицирующее пространство и G-расслоения
4. Классы Черна комплексных расслоений
5. Исчисление Шуберта
6. Характер Черна – Дольда
7. Эквивариантное интегрирование
8. Формулы локализации Атьи – Ботта
9. Вычисления и применения

УЧЕБНИКИ:

[Ф] У. Фултон. Теория пересечений. М., «Мир», 1989.

[МСт] Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы. М., «Мир», 1979.

[AB] M. F. Atiyah, R. Bott. The moment map and equivariant cohomology.

[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. Heat kernels and Dirac operators. Springer, 2003.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: вычисляется по формуле $\min(100,\ 0.3H + 0.3 + 0.6E)/10$, где H — процентная доля решённых домашних задач и проводимых на семинарах коротких контрольных, M — мидтерм и E — письменный экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

КОММЕНТАРИЙ: курс читается на русском языке двумя преподавателями.

Числа Гурвица
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛИ: Б. С. Бычков, Н. Я. Амбург.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящен различным аспектам чисел Гурвица, обобщающих задачу о перечислении детских рисунков Гротендика. Мы начнём с их оригинального, восходящего к А. Гурвицу (1859–1919) определения, как числа представлений перестановки в виде произведения транспозиций. Несмотря на простоту определения, числа Гурвица лежат на стыке огромного количества областей современной математики и математической физики, с некоторыми из которых мы познакомимся на курсе. Во-первых, на геометрическом языке числа Гурвица можно определить как число разветвленных накрытий сферы. Во-вторых, всякую задачу о перечислении объектов правильно решать на языке производящих функций — им будет посвящена изрядная часть курса. В-третьих и четвертых, если позволит время и силы, мы посмотрим на числа Гурвица с точки зрения алгебры (групповой алгебры симметрической группы) и комплексного анализа. Курс является естественным продолжением курса осеннего семестра «Графы на поверхностях», однако может быть взят и независимо.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Нет

ПРОГРАММА:

- Графы и перестановки, формула Кэли
- Числа Гурвица
- Склейки $2n$-угольника, формула Харера–Цагира
- Разветвленные накрытия
- Формула Римана–Гурвица
- Перечисление разветвленных накрытий
- Производящие функции для чисел Гурвица

УЧЕБНИКИ:

- А. К. Звонкин, С. К. Ландо. Графы на поверхностях и их приложения.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов за решение домашних задач.

Школьные олимпиадные задачи
НИС для студентов 1-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: Г. Р. Челноков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Курс рассчитан на студентов и аспирантов, имеющих опыт решения олимпиадных задач. Такой опыт обеспечивает 90% умений, необходимых чтобы самому заниматься олимпиадным преподаванием: составлять олимпиады, подбирать и проводить курсы элементарных задач, позволяющих на школьном уровне заглянуть в «большую» математику и многое другое. Развитию оставшихся 10% умений и посвящён этот семинар.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Опыт самостоятельного решения олимпиадных задач

ПРОГРАММА: Каждый участник получает индивидуальный набор задач (имитирующий сырье олимпиады), их требуется решить и рассказать на семинаре, вместе с оценкой их сложности и пригодности для олимпиады.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: каждая решённая задача из персонального задания оценивается в 1 балл, каждая придуманная хорошая (это важно) задача оценивается в 2 балла.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар может быть предложен в дистанционном формате. Имеется ограничение по числу участников — не более 30.

Элементарное введение в теорию автоморфных форм
НИС на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. М. Левин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Автоморфные формы мистическим образом появляются в различных областях математики от теории чисел до математической физики. С другой стороны, в исследовании автоморфных форм синтезируются методы разнообразных областей математики, таких как теория функций комплексных переменных, топология, дифференциальной геометрия, теория групп Ли и теория чисел. Однако основные понятия и концепции этой глубокой теории могут быть определены и проиллюстрированы с использованием не слишком продвинутых технических средств, что и составляет предмет предлагаемого курса .

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: три семестра бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии), в 4-м модуле понадобятся начала теории функций комплексной переменной

ПРОГРАММА:

- Эллиптические функции как обращения многозначного интеграла с мотивацией из геометрии и теоретической механики.
- Решетки в поле комплексных чисел. Модулярные формы. Примеры: ряды Эйзенштейна. ([Л], [С])
- Тригонометрические функции и экспонента по Эйзенштейну. Значения дзета функции в четных числах ([В])
- Эллиптические функции по Эйзенштейну и соотношения на ряды Эйзенштейна ([В])
- Реализация верхней полуплоскости как фактора и модулярного множества как двойного фактора
- Обзор классификации классических групп и понятие автоморфных форм ([В], [W])
- Симплектическая группа и формы Зигеля ([М])
- Если позволит время: вещественные квадратичные порядки и формы Гильберта.

УЧЕБНИКИ:

[В] А. Вейль. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру.

[Л] С. Ленг. Введение в теорию модулярных форм.

[М] Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях.

[С] Ж.-П. Серр. Курс Арифметики.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\mathbf{min}(150, H+E)\ /\ 15$, где H и E суть процентные доли решённых домашних и экзаменационных задач от общего числа заданных обязательных задач, вычисленные по формуле $100\,*$ [число всех (включая необязательные) решённых задач]:[число заданных обязательных задач]. Обратите внимание, что это отношение может быть больше 100. Таким образом, для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач, или другим способом набрать сумму $H+E = 150$. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

КОММЕНТАРИЙ: курс читается на английском по просьбе совета академических руководителей.

Элементы стохастической динамики
НИС для студентов 3-го курса и старше

РУКОВОДИТЕЛЬ: А. С. Ильин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2020/21 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Стохастические динамические системы появляются в самых разных областях теоретического знания от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Поэтому знакомство с основными способами обращения с ними без сомнений полезно. Наш курс создан для того, чтобы ввести слушателей в базовый круг идей и понятий этой науки и дать набор инструментов для решения конкретных задач. Важная особенность курса заключается в том, что изложение ведется на относительно элементарном языке с опорой на теорию корреляционных функций и их производящих функционалов, что в дальнейшем даёт возможность плавно перейти к изучению технически более сложных конструкций, в рамках соответствующих курсов квантовой теории поля, статистической физики, финансовой математики и др. Для понимания курса достаточно знания основных понятий линейной алгебры и математического анализа, а также, в меньшей степени, обыкновенных дифференциальных уравнений и элементарной теории вероятности. Изложения начинается с определения непрерывных случайных величин и векторов. Обсуждается понятие плотности вероятности статистических моментов и их характеристических функций. Вводятся понятия связных моментов (куммулянтов) случайных векторов, которые позволяют с одной стороны очень легко и изящно изложить такие важные вопросы теории вероятности, как закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений, а с другой — позволят в дальнейшем плавно и безболезненно перейти к соответствующим обобщениям в курсах КТП и стат. физики. Случайная функция (случайный процесс, случайное поле) вводится как естественное обобщение случайного вектора на бесконечномерный случай. При этом изложение ведется также на языке корреляционных функций и связных корреляционных функций (куммулянтов). Такой подход позволяет быстро и легко обсудить такие важные понятия как корреляционное время, корреляционный масштаб, дельтапроцессы, Пуассоновский и Гауссовский случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. После обсуждения этих базовых понятий теории случайных процессов и полей, рассматриваются простейшие линейные стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). Такие уравнения встречаются во многих областях теоретической физики, экономики и финансовой математики, и знание их основных свойств представляется очень полезным. Кроме всего прочего они составляют базу для «интуитивного» понимания процессов в более сложных нелинейных стохастических системах. В качестве интересного примера, обсуждается парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом и поясняется значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана – Каца, который позволяет находить решения параболических дифференциальных уравнений в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм широко используется в современной квантовой теории, поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного математика. В процессе изучения этого формализма мы рассмотрим понятия интегралов Ито и Стратоновича, а также поговорим о стохастическом квантовании. В заключении курса рассматривается технически довольно сложная, но чрезвычайно красивая теория континуальных произведений случайных матриц. Такие произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, гидродинамике, экономике и многих других областях науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Линейная алгебра, Дифференциальные уравнения 2-го года бакалавриата. Также желательно знакомство с основами теории вероятности. На лекциях будет дано краткое напоминание нужных фактов.

ПРОГРАММА:

1. Случайные векторы, моменты, куммулянты, производящие функции.
2. Закон больших чисел, центральная предельная теорема, принцип больших отклонений.
3. Случайные процессы и поля, Корреляционные функции, Связные Корреляционные Функции, Производящие функционалы.
4. Одноточечная и двухточечная статистика, корреляционное время. Дельта процессы. Пуассоновский процесс.
5. . Гауссовы случайные процессы и поля, теорема Вика.
6. Закон больших чисел, центральная предельная теорема, принцип больших отклонений для случайных процессов.
7. Стохастические дифференциальные уравнения. Мультипликативный и аддитивный шум. Диффузия. Перемежаемость.Винеровский процесс. Уравнение Ланжевена.
8. Уравнение Фоккера-Планка. Мера Винера. Формализм Фейнмана-Каца. Стохастические интегралы Ито и Стратановича. Стохастическое квантование.
9. Дискретные и континуальные произведения случайных матриц. Индексы Ляпунова. Матричные стохастические уравнения с мультипликативным шумом.

УЧЕБНИКИ:

- Д. Глим, А. Джаффе. Математически методы квантовой физики : подход с использованием функциональных интегралов. М. Мир. 1984
- Г. Крамер. Математические методы статистики. М. Мир. 1975.
- В.С. Владимиров, Обобщеные функции в математической физике. М. Наука, 1979.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценивание основывается на следующих четырех оценках:

- $S \in [0, 5]$ – оценка за сдачу листков, вещественное число между 0 и 5,
- $C \in [0, 5]$ – оценка за самостоятельные работы на семинарах (проводимые раз в несколько занятий), вещественное число между 0 и 5,
- $E \in [0, 5]$ – оценка за устный экзамен, вещественное число между 0 и 5.

Полная оценка вычисляется по следующей формуле:

$$\min(10, \lceil S + C + E \rceil),$$

где $\lceil\rceil$ соответствует округлению вверх. Если для какого-то студента до финального экзамена выполняется условие $\min(10, \lceil S + C \rceil \geq 8$, то данный студент может получить эту оценку автоматом и не идти на экзамен.

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

Algebraic Geometry: A Start Up Course

a course for 2nd year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: A. S. Tikhomirov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Algebraic geometry studies geometric loci looking locally as a solution set for a system of polynomial equations on an affine space. The main feature of this subject is that it provides an algebraic explanation to various geometric properties of the figures and at the same time gives geometric intuition to purely algebraic constructions. It plays an important role in many areas of mathematics and theoretical physics, and provides the most visual and elegant tools to express all aspects of the interaction between different branches of mathematical knowledge. The course gives the flavor of the subject by presenting examples and applications of the ideas of algebraic geometry, as well as a first discussion of its technical tools.

PREREQUISITES: first year of undergraduate study (algebra, calculus, geometry, topology).

SYLLABUS:

- Projective spaces. Geometry of projective quadrics. Spaces of quadrics.
- Lines, conics, and PGL (2). Rational curves and Veronese curves. Plane cubic curves.
- Grassmannians, Veronese's, and Segre's varieties. Examples of projective maps coming from tensor algebra.
- Elements of commutative algebra: Integer elements in ring extensions, finitely generated algebras over a field, transcendence generators, Hilbert's theorems.
- Affine Algebraic Geometry – Commutative Algebra dictionary. Maximal spectrum, pullback morphisms, Zariski topology, geometry of ring homomorphisms.
- Agebraic manifolds, separateness. Irreducible decomposition. Projective manifolds, properness. Rational functions and maps.
- Dimension. Dimensions of subvarieties and fibers of regular maps. Dimensions of projective varieties.
- Vector bundles and their sheaves of sections. Vector bundles on the projective line. Linear systems, invertible sheaves, and divisors. The Picard group.
- If the time allows: (co)tangent and (co)normal spaces and cones, smoothness, blowup. The Euler exact sequence on a grassmannian.

TEXTBOOKS:

- A.L.Gorodentsev, Algebra II. Textbook for Students of Mathematics. Springer, Ch. 1, 2, 10, 11, 12.
- A. L. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start Up Course, MCCME.
- J. Harris, Algebraic Geometry. A First Course, Springer, 1992.
- M. Reid, Undergraduate algebraic geometry, CUP, 1989.

GRADING RULES: final grade = 5·(percentage of solutions of the problems from the task sheets) + 5·(percentage of solutions of the problems from final written exam).

Algebraic geometry: Deformation theory with the view of Mori theory
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: V. S. ZHGOON.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The aim of the course is to give the introduction to the advanced topics of algebraic geometry which are usually omitted in the standard course. The fruitfull schematic approach of Grothendieck allows to construct such objects as: Hilbert scheme (which classifies the subschemes of a given scheme), Quot scheme and scheme of morphisms between two schemes. The deformation theory studies the infinitesimal structure of these schemes, that allows to say much about the objects where the deformations are considered. This idea was used by Mori who used the geometry of rational curves to study the birational geometry of projective varieties. In the course we shall discuss these variety of topics.

PREREQUISITES: Basic notions of algebraic geometry of schemes or a good knowledge of commutative algebra and basic algebraic geometry.

SYLLABUS:

1. Deformation theory. Deformations of different objects: schemes, sheaves, morphisms etc. Tangent spaces to the space of deformations. Infinitesimal obstructions.
2. Hilbert, Quot, Hom and Chow schemes.
3. Applications to the spaces of rational curves. Bend and break technique.
4. Multiplier ideals. Kawamata-Viehweg vanishing theorem. Shokurov non-vanishing and base-point-freeness theorem. Mori cone theorem.
5. Fulton – Hansen connectedness theorem and its applications to geometry of projective varieties. Zak theorems.

TEXTBOOKS:

1. Lazarsfeld, Robert K. Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: line bundles and linear series. Vol. 48. Springer, 2004.
2. Hartshorne, Robin. Deformation theory. Vol. 257. Springer, 2009.
3. Debarre, Olivier. Higher-dimensional algebraic geometry. Springer, 2013.
4. Kollár, János. Rational curves on algebraic varieties. Vol. 32. Springer, 2013.
5. Esnault, Hélène, and Eckart Viehweg. Lectures on vanishing theorems. DMV seminar. 1992.
6. Matsuki, Kenji. Introduction to the Mori program. Springer, 2013.

GRADING RULES: $\big(2\,(\text{final exam })/3 + (\text{problem sheets})/3\big)/10.$

Analysis of several complex variables
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. A. GLUTSYUK.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Analysis of several complex variables is not studied in the usual university program. At the same time it is a necessary pre-requisite to study many important domains of contemporary mathematics such as algebraic geometry, complex dynamics, singularity theory, differential equations etc. While holomorphic functions of several complex variables share many basic properties of functions of one variable, new phenomena of analytic extention occurs. For example, they can have neither isolated singularities, nor compact sets of singularities. Each complex space of dimension at least two contains a proper domain that is biholomorphically equivalent to the ambient space (Fatou–Bieberbach domain). Theory of holomorphic convexity and Stein manifolds together with basic sheave theory allows to prove important extension and approximation theorems. The GAGA principle in algebraic geometry says that every analytic object on a complex projective algebraic manifold is algebraic. The cours will cover the above mentioned topics, including basic analytic set theory, biholomorphic automorphisms and introduction to complex dynamics.

PREREQUISITES: Basic calculus. Analytic functions of one complex variable.

SYLLABUS: Basic properties of holomorphic functions of several complex variables. Hartogs and other erasing singularity theorems. Analytic set theory, Weierstrass polynomials, introduction to complex algebraic geometry. Generalized Maximum Principle, Schwarz Lemma, Cauchy Inequality, automorphisms, complex dynamics. Polynomial automorphisms, Fatou–Bieberbach domains. Domains of holomorphy, holomorphic convexity, Levi- and pseudo-convexity, Levi form. Envelopes of holomorphy, Riemann domains. Dolbeault cohomology, Poincare lemma, Cousin problems, Sheaf cohomology. Stein manifolds, coherent analytic sheaves, extension and approximation theorems, Cartan A and B Theorems (without proofs).

TEXTBOOKS:

- R.Gunning; H.Rossi. Analytic functions of several complex variables. AMS Chelsea Publishing, 2009.
- B.Shabat. Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables. Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1992.
- Ph.Griffiths; J.Harris. Principles of algebraic geometry. J.Wiley and Sons, 1978. E.M.Chirka. Complex analytic sets. Springer, 1989.

GRADING RULES: 0.3(оценка за решение задач) + 0.7(оценка за экзамен)

C^*-ALGEBRAS AND COMPACT QUANTUM GROUPS
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: A. YU. PIRKOVSKII.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The C^*-algebra theory is an algebraic branch of functional analysis. It appeared in the 1940ies in the foundational papers of I. M. Gelfand and M. A. Naimark, and has evolved into an extremely deep, multi-branch mathematical discipline since then. A C^*-algebra is a $\mathbb{C}$-algebra equipped with a norm and an involution satisfying some compatibility axioms. The basic examples are the algebra $C(X)$ of continuous functions on a compact topological space X and the algebra $\mathcal{B}(H)$ of bounded linear operators on a Hilbert space H. These examples are «universal» due to the following Gelfand-Naimark Theorems: (1) each commutative C^*-algebra with identity is isomorphic to $C(X)$ for some X, and (2) each C^*-algebra can be isometrically embedded into $\mathcal{B}(H)$ for some H. The 1st Gelfand-Naimark Theorem (statement (1) above) lies at the foundation of noncommutative geometry (à la A. Connes) and the theory of compact quantum groups.

The theory of compact quantum groups was created mostly by S. L. Woronowicz in the 1980ies – 1990ies. Loosely speaking, a compact quantum group is a «deformation» of the algebra of continuous functions on a compact topological group. Thus, according to the well-known saying, quantum groups are «neither quantum, nor groups». In Woronowicz's theory, a compact quantum group is a C^*-algebra endowed with an additional structure (comultiplication) satisfying some natural axioms. The C^*-algebra approach to quantum groups is closely related to the more popular algebraic approach via duality, real forms and C^*-completions, but in general there is no 1–1 correspondence between them. Many classical results of the theory of compact groups (the existence and uniqueness of the Haar measure, the complete reducibility of unitary representations, the Peter-Weyl theorem, the Tannaka-Krein duality, etc.) have natural «quantum» analogs. The theory of compact quantum groups is only a part of a much more general (and much more difficult) theory of locally compact quantum groups developed by J. Kustermans and S. Vaes in the early 2000ies. Nowadays, this is one of the most popular and actively developing fields of operator algebra theory.

PREREQUISITES: The Lebesgue integration theory and the basics of functional analysis. Some knowledge of the representation theory of compact (or at least finite) groups will also be helpful.

SYLLABUS: 1. C^*-algebras. Basic examples. Commutative C^*-algebras and the 1st Gelfand – Naimark Theorem. The functional calculus in C^*-algebras.

2. Positive elements in C^*-algebras. Representations of C^*-algebras. Positive functionals and the GNS construction. The 2nd Gelfand-Naimark Theorem.

3. Tensor products of C^*-algebras. C^*-envelopes.

4. Hilbert C^*-modules. Multiplier algebras.

5. Compact quantum groups. Examples (the quantum SU(n), the quantum SO(n), the free unitary and free orthogonal quantum groups). Commutative compact quantum groups.

6. The Haar state.

7. Unitary corepresentations. Decomposing into irreducibles.

8. The orthogonality relations. The Hopf subalgebra of matrix elements.

9. The Tannaka-Krein duality (if time permits).

TEXTBOOKS: 1. G. J. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.

2. S. Neshveyev, L. Tuset. Compact quantum groups and their representation categories. SMF, 2013.

3. K. R. Davidson. C^*-algebras by example. AMS, 1996.

4. B. Blackadar. Operator algebras. Springer, 2006.

5. J. Dixmier. C^*-algebras and their representations. North-Holland, 1977.

6. A. Ya. Helemskii. Banach and locally convex algebras. Oxford, 1993.

7. M. Takesaki. Theory of operator algebras. Springer, 2002 (vol. I), 2003 (vols. II and III).

8. E. C. Lance. Hilbert C^*-modules. A toolkit for operator algebraists. Cambridge Univ. Press, 1995.

9. T. Timmermann. An invitation to quantum groups and duality. EMS, 2008.

10. A. Klimyk, K. Schmudgen. Quantum groups and their representations. Springer, 1997.

GRADING RULES: Total grade = exam grade.

The written take-home exam will be given at the beginning of May and will consist of 8 problems. You will have appr. 2 weeks to solve the problems.

COMMENTS: Будет читаться по-английски, если будут нерусскоязычные слушатели. В противном случае (с согласия слушателей) будет читаться по-русски.

Character sums
a seminar for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: A. B. Kalmynin.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Many questions in number theory lead to study of sums of multiplicative functions on the set of natural numbers. One of the simplest and at the same time most insightful examples is the case of periodic multiplicative functions, i.e. Dirichlet characters. Course «Character sums» will be devoted to the study of estimates for the sums of Dirichlet characters over various sets and their applications to other problems in number theory. We will obtain estimates for sums of Dirichlet characters via exponential sums and connect the resulting estimates with properties of corresponding L-functions. We will also discuss connections between character sums and distribution of quadratic residues modulo large prime numbers, bounds for the least quadratic nonresidue and the least prime quadratic residue, large sieve method and its applications.

PREREQUISITES: Complex Analysis (basic properties of holomorphic functions, Cauchy's integral formula, Maximum modulus principle, Weierstrass factorization theorem), Analysis (O-notation, Lebesgue–Stieltjes integration, basic Fourier analysis), Algebra (fundamental theorem of arithmetic, notion of number field and its ring of integers)

SYLLABUS:

1. Dirichlet characters, their Fourier developments and L-functions, law of quadratic reciprocity. Values of Dirichlet L-functions at $s = 1$ and quadratic fields. Class numbers and elliptic curves.
2. Polya–Vinogradov inequality and its applications. Generalized Riemann hypothesis, conditional estimates for character sums. Lower bounds for character sums.
3. Points on curves over finite field, Stepanov method and Burgess' bound. The least quadratic nonresidue.
4. Sums over primes and shifted primes, the least prime quadratic residue and the least primitive root. Large sieve method and Linnik's theorem on the least quadratic nonresidue. Other applications of the large sieve.

TEXTBOOKS:

1. T. Tao, «Analytic prime number theory», lecture notes of Math 254A course
https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/
2. Noam D. Elkies' Analytic Number Theory lecture notes (Harvard University, Spring 1998)
http://www.math.harvard.edu/~elkies/M259.98/index.html
3. A. Strombergsson, «Analytic number theory — Lecture notes based on Davenport's book»,
http://www2.math.uu.se/~astrombe/analtalt08/www_notes.pdf

GRADING RULES: $\min\big(10,\ 0.4\,(\text{problem sets (max 10 pts)}) + 0.6\,(\text{talk (max 12pts)})\big)$.

CLUSTER VARIETIES
a seminar for 3^{rd} year students and higher

ADVISOR: V. G. GORBOUNOV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The theory of electrical networks developed in the work of Ohm and Kirkhoff has been a source of interesting mathematics for almost 200 years. Enumeration on graphs, discrete integrable systems, discrete complex analysis, symplectic geometry are among the areas the electrical networks are connected to. The purpose of the course is to discuss a relatively recent development. It turns out that electrical networks can be viewed as a deformation of another well studied structure, the cluster algebra structure on the classical Lie groups. In particular electrical networks give rise to a Lie group called the Electrical Lie group and it is a deformation of the Unipotant group. As a consequence one gets a non trivial deformation of the cluster algebra structue on the Uniportant group. The theory of total positivity in the Uniportant group also deforms to the Electrical Lie group in an interesting way. Describing these deformations is the main goal of the course.

PREREQUISITES: Standard courses on linear algebra, analysis and topology.

SYLLABUS:

- The classical theory of electrical networks. Laplacian matrix, Response matrix, Schur complement, star-triangular transformation.
- Applications to enumetration on graphs, enumeration of generating trees, forests and groves in terms of Laplacian and the Responce matrices .
- Connection to symplectic geometry, coisotropic reduction, Response matrix as coisotropic reduction of the Laplacian matrix.
- Totally positive uniportant matrices and Cluster algebra structure on the Unipotant group. The Lusztig theory of positivity.
- Electrical Lie group, Electrical cluster algebra and total positivity in the Electrical group.

TEXTBOOKS:

[CIM] E. B. Curtis, D. Ingerman and J. A. Morrow, Circular planar graphs and resistor networks , Linear Algebra and its Applications, vol. 283, (1998), 115-150.

[BFZ] Arkady Berenstein Sergey Fomin Andrei Zelevinsky, Parametrizations of Canonical Bases and Totally Positive Matrices, Advances in mathematics 122, 49-149 (1996).

[LP] T. Lam and P. Pylyavskyy, Electrical networks and Lie theory, Algebra Number Theory, Volume 9, Number 6 (2015), 1401-1418.

[GT] V. Gorbounov and D. Talalaev, Electrical varieties as vertex integrable statistical models, arXiv:1905.03522 [math-ph]

GRADING RULES: The final mark will be calculated as the average of the two marks, one given for the oral presentation of a topic related to the course and another given for an oral examination in the end of the course.

Combinatorics of Vassiliev invariants
a seminar for 2^{nd} year students and higher

ADVISORS: M. E. Kazarian, S. K. Lando.

LEARNING LOAD: two terms of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS:

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

TEXTBOOKS:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

GRADING RULES: Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, only the participation can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

COMPLEX GEOMETRY
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: M. S. VERBITSKY.

LEARNING LOAD: Module 1 of 2020/21 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Algebraic geometry can be studied two different ways. You can deduce everything from commutative algebra, as it was done in classical Italian school of algebraic geometry. This is an elementary approach, but not intuitive and using a lot of exhausting work. Instead, as Hodge suggested, the foundation of algebraic geometry can be based on topology and differential geometry. The main tool of this approach is the theory of harmonic forms on Riemannian manifolds, known as «Hodge theory»; in addition, one uses complex analysis, differential geometry and homological algebra. This approach (also called «Hodge theory») is more straightforward and intuitive, but it takes much preliminary work around topology and analysis. Also, Hodge theory works only in characteristic 0. This is the approach I choose.

PREREQUISITES: This course requires a knowledge of differential geometry (manifolds, bundles, connections, de Rham algebra, Stokes' theorem), algebraic topology (de Rham cohomology, intersection theory, Poincare duality) and complex analysis (Taylor decomposition of holomorphic functions). I would assume a few results of spectral theory of Laplacian operators without proof.

SYLLABUS: 1. Complex structures, almost complex structures, Hodge decomposition on differential forms.

2. Almost complex manifolds and their integrability, Newlander-Nirenberg theorem for real analytic manifolds.

4. Hermitian metrics, Kahler manifolds, examples and main properties of Kahler manifolds. Fubini-Study metrics. Kahler metrics on homogeneous complex manifolds.

5. Levi – Civita connection on Kahler manifolds and its properties.

6. Supersymmetry on Kahler manifolds and its applications: Kahler identities, Hodge decomposition, Lefschetz theorem, sl(2)-triples and Lefschetz decomposition on cohomology.

7. Currents and generalized functions. Integral kernels. Cauchy kernel.

8. Poincare – Dolbeault – Grothendieck lemma. Dolbeault cohomology. Geometric interpretation of the Hodge decomposition and its applications.

9. Holomorphic differential forms and their properties. Birational maps. Blow-ups. Invariance of holomorphic differential forms under birational maps. Canonical bundle and its properties.

10. Holomorphic bundles. Chern connection, its existence and uniqueness, its curvature. Line bundles, exponential exact sequence, first Chern class and its properties.

11. Supersymmetry algebra of a Kahler manifold, its action on differential forms with coefficients in a bundle. Kodaira – Nakano identities. Kodaira-Nakano vanishing theorem.

12. Globally generated, ample and very ample bundles. Projective embeddings. Kodaira embedding theorem. Algebraic dimension of complex manifolds. Moishezon, complex non-algebraic and non-Kahler manifolds.

13. (*) Abelian manifolds and complex tori. Albanese map and its properties. Holomorphic differentials on Riemann surfaces.

14. (*) Calabi – Yau theorem, Calabi-Yau manifolds, Monge – Ampere equation, classification of Riemannian holonomies and its applications.

Last two subjects will be considered if time permits only.

TEXTBOOKS: Lectures on Kahler geometru, Andrei Moroianu http://moroianu.perso.math.cnrs.fr/tex/kg.pdf

Complex analytic and differential geometry, J.-P. Demailly http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf

Lectures on Kahler manifolds, W. Ballmann http://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/notes.html

C. Voisin, «Hodge theory».

D. Huybrechts, «Complex Geometry — An Introduction»

A. Besse, «Einstein manifolds».

GRADING RULES: The final score is obtained by summing up the points from the exam problems and the class tests.

DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS
a seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: A. B. KALMYNIN.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The set of prime numbers and its properties, such as distribution of primes in short intervals and arithmetic progressions, plays crucial role in modern number theory, as prime numbers are «bulding blocks» of integers. Course «Distribution of prime numbers» will be devoted to various results about prime numbers, starting from the most classical, such as the Prime Number Theorem and its connection with the Riemann Hypothesis, and ending with more modern and technically difficult ones, such as Vinogradov's three primes theorem and Heath – Brown's result on infinitude of twin primes in the case of existence of Siegel zeros. We will also touch on the questions on primes in short intervals and polynomial sequences and learn basics of sieve methods and other methods of analytic number theory along the way.

PREREQUISITES: Complex analysis (basic properties of holomorphic functions, Cauchy's integral formula, Maximum modulus principle, Weierstrass factorization theorem), Analysis (O-notation, Lebesgue-Stieltjes integration), Algebra (fundamental theorem of arithmetic)

SYLLABUS:

1. Summation of arithmetical functions, Dirichlet series, Perron's formula.
2. Riemann zeta function, Dirichlet L-functions, Prime Number Theorem, primes in arithmetic progressions, Riemann hypothesis, Siegel-Walfisz theorem, Siegel zeros.
3. Sieve methods: sieve of Eratosthenes, Brun's theorem, Vinogradov's formula for von Mangoldt function and estimate for linear exponential sum with primes.
4. Any large enough natural number is a sum of three primes. Numbers of the form $n^2 - 1$ and $n^2 + 1$ with few prime factors. Romanov's theorem.
5. Smooth numbers, primes in short intervals and Rankin's theorem on large gaps between primes. *Irregularities in distribution of primes. *Twin primes and Siegel zeros

TEXTBOOKS:

1. К. Прахар. «Распределение простых чисел» https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Prahar1967ru.pdf
2. T. Tao. «Analytic prime number theory», Math 254A course, https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-analytic-prime-number-theory/
3. Д. Р. Хиз-Браун «Lectures on sieves», arXiv:math/0209360

GRADING RULES: min(10, 0.3 (problem sets (max 10pts)) + 0.7 (talk (max 12pts))).

Elementary Introduction to the Theory of Automorphic Forms
a seminar for 2^{nd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISOR: A. M. Levin.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Automorphic forms are usefull in rather mysterious way in various areas from the number theory to the mathematical physics. At the other side, the technique methods of this theory are recruited from different brunches of the mathematics like complex analysis, topology, differential geometry, Lie group theory and number theory. Nevertheless, the main notions and concepts of this comprehensive theory can be explained and illustrated via rather elementary thechnical tools.

PREREQUISITES: The first year of bachelor program (basic calculus, basic algebra). For 4th module, basic complex analysis.

SYLLABUS:

- Elliptic Functions as inversion of a multivalued integral with applications to geometry and mechanics.
- Lattices in the field of complex numbers. Modular forms. Examples: Eisenstein series. [L], [S]
- Trigonometric and exponential functions according to Eisenstein. Zeta-values at even numbers. [W]
- Elliptic functions according to Eisenstein and relations between Eisenstein series. [W]
- Realizations of the upper half-plane as coset and modular set as double coset.
- Review of classical groups and notion of the automorphic forms. [W]
- The symplectic group and Siegel forms. [M]
- Real quadratic orders and Hilbert forms.

TEXTBOOKS:

[W] A. Weil. Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker.

[L] S. Lang. Introduction to Modular Forms.

[M] D. Mumford. Tata Lectures on Theta.

[S] J.-P. Serre. A Course in Arithmetics.

GRADING RULES: $\min(150, H+E)/15$, where H is the percentage of solved problems in the homeworks and E is the percentage of solved problems in the tests.

FUNCTIONAL ANALYSIS 2 (OPERATOR THEORY)
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: A. YU. PIRKOVSKII.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

This course is a continuation of the course «Introduction to Functional Analysis» (fall 2020). We plan to discuss those aspects of functional analysis which deal with rather general classes of linear operators on Banach and Hilbert spaces. This means that we will not consider, for example, differential operators at all, because their theory can be well presented in a separate course only. Instead, we concentrate on those topics which emphasize the role of algebraic methods in functional analysis.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral, basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators)

SYLLABUS:

1. Topological vector spaces and duality.
2. Compact and Fredholm operators. The Riesz – Schauder theory. The general index theory.
3. Commutative Banach algebras. The Gelfand transform. The commutative Gelfand – Naimark theorem.
4. Spectral theory of normal operators on a Hilbert space. The spectral theorem.
5. Distributions (if time permits).

TEXTBOOKS:

1. A. Ya. Helemskii. Lectures and exercises in Functional Analysis. AMS, 2006.
2. V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. Real and Functional Analysis. RCD, 2011 (in Russian).
3. A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. Theorems and problems in Functional Analysis. Springer, 1982.
4. B. Simon. Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4). AMS, 2015.
5. M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis. Academic Press, 1972.
6. W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991.
7. J. B. Conway. A course in Functional Analysis. Springer, 1990.
8. G. Murphy. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.

9. R. Meise and D. Vogt. Introduction to Functional Analysis. Clarendon Press, 1997.
10. F. Treves. Topological vector spaces, distributions, and kernels. Academic Press, 1967.

GRADING RULES: final grade $= 0.7 \times$ (cumulative grade) $+ 0.3 \times$ (exam grade).

cumulative grade $= 0.5 \times$ (midterm grade) $+ 0.5 \times$ (exercise sheets grade).

The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.

The midterm exam (also oral) will be at the end of March and will include only the material of the 3rd module.

To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.

You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «B» in the sheets).

Functional Analysis and Noncommutative Geometry
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: two terms of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: The students who participate in the seminar give talks on functional analytic aspects of noncommutative geometry. Talks devoted to noncommutative algebraic geometry and to «pure» functional analysis (preferably with algebraic flavour) are also welcome. The topics of talks are usually taken from the literature, but sometimes the participants present their own results. Occasionally, talks are given by the seminar advisor or by an invited speaker.

PREREQUISITES: The participants are supposed to know basic algebra and functional analysis and to love any kind of geometry or topology.

SYLLABUS: This is not a syllabus in the usual sense, but is rather a selection of topics (some of which are quite large) which could vary according to the participant's taste.

1. Quantum bounded symmteric domains and noncommutative complex analysis in the spirit of L. L. Vaksman.
2. Strict deformation quantization (M. Rieffel et al.).
3. Deformations of C^*-algebras (in a broad sense).
4. Noncommutative complex analytic geometry (A. Polishchuk, A. Schwarz, P. Smith, M. Khalkhali, G. Landi, et al.).
5. An operator-theoretic approach to noncommutative complex analysis (W. Arveson, G. Popescu, et al.).
6. Noncommutative complex structures and positive Hochschild cocycles (A. Connes, M. Khalkhali, G. Landi, et al.).
7. Noncommutative integration, noncommutative L^p-spaces.
8. Noncommutative geometry (algebraic and analytic) of PI algberas.
9. Bivariant K-theory and bivariant periodic cyclic homology (G. Kasparov, J. Cuntz, R. Meyer, et al.).
10. C^*-superalgebras (P. Bieliavsky et al.).
11. DQ-modules (M. Kashiwara, P. Schapira).
12. Holomorphic functions of several free variables (J. Taylor, D. S. Kaliuzhnyi – Verbovetskyi, V. Vinnikov).
13. «Physical» aspects of noncommutative geometry (including Bost – Connes systems).

TEXTBOOKS:

1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.
2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.
3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.
4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkhäuser, 2007.
6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.
7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).
8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkhäuser, 2002.

GRADING RULES: To get a positive grade, you should give (at least) one talk at the seminar. The grade will depend on the quality of the talk.

Homotopy theory
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. G. GORINOV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: We give an introduction to generalised cohomology and stable homotopy theory. At first, we consider examples and a few applications of generalised homology and cohomology, such as the Bott periodicity, Hopf invariant 1, complex structures on spheres, representing classes by manifolds, cobordism rings. After that we develop a general theory: spectra, stable homotopy category, fibration and cofibration sequences, the Whitehead theorem, the Atiyah duality.

PREREQUISITES: Basic algebraic topology as covered, e.g., in [3] or [2, Ch.1-2]. However, the material of [3, Ch.4] and [2, Ch.1] will be recalled if necessary.

SYLLABUS:

1. Axioms for generalised (co)homology.
2. Cofibration sequences for spaces. Omega-spectra and cohomology theories.
3. Fibration sequences for spaces.
4. First applications: the Dold – Thom theorem, representing rational homotopy classes by manifolds.
5. Brown's representability theorem for cohomology.
6. Basic K-theory.
7. Complex Bott periodicity; extending the complex K-theory to a cohomology theory.
8. Applications of K-theory: the Hopf invariant 1 and almost complex structures on spheres.
9. Spectra and stable homotopy category. Homotopy groups of spectra.
10. Thom spectra and cobordism. The Pontrjagin – Thom theorem.
11. Calculation of $\pi_*(\mathrm{MO})$ and $\pi_*(\mathrm{MSO}) \otimes \mathbb{Q}$.
12. Whitehead's theorem for spectra.
13. Spectra can be desuspended.
14. Fibration and cofibration sequences for spectra.
15. Duality for spectra. The Alexander duality.
16. The Thom isomorphism for generalised cohomology and the Atiyah duality.
17. The topological Riemann – Roch theorem and applications. Schwarzenberger's conditions on the Chern numbers of complex vector bundles on $\mathbb{CP}^n$.

TEXTBOOKS:

1. J. Adams, Stable Homotopy and Generalised Homology.
2. D. Fuchs, A. Fomenko, A course in Homotopy Theory.
3. A. Hatcher, Algebraic Topology.

GRADING RULES: 100% home exam.

Invariant Theory
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: M. V. FINKELBERG.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The classical Invariant Theory studies the rings of functions on a vector space invariant with respect to an action of an algebraic group. One of the standard problems is to find a nice set of generators and relations of this ring. More invariantly, the aim is to define and compute the quotient of an algebraic variety by an action of an algebraic group (roughly parametrizing the set of orbits). This theory originates in 19th century and is one the most efficient tools of constructing and studying the new algebraic varieties (for example, the quiver varieties).

PREREQUISITES: First two years of our program: Linear algebra, basic algebra, complex analysis, analysis on manifolds.

SYLLABUS:

- The generators of the ring of conjugation invariant functions on classical Lie groups and their Lie algebras.
- The generators of the ring of invariant functions on Cartan Lie algebras with respect to the Weyl groups of classical groups.
- The generators and relations of the ring of functions on 2-dimensional vector space invariant with respect to a finite subgroup of the special linear group (Klein singularities).
- The first main theorem of the invariant theory of classical Lie groups.
- The second main theorem of the invariant theory of classical Lie groups.
- The Capelli identity and its applications to the Harish – Chandra center of the universal enveloping algebra of the general linear Lie algebra.
- The construction and classification of irreducible representations of the general linear group.
- The Schur – Weyl duality.
- The construction and classification of irreducible representations of the orthogonal, special orthogonal and symplectic groups.
- The construction of spinor groups.
- The Chevalley – Shephard – Todd theorem on invariants of complex reflection groups.
- Hilbert's theorems on quotients with respect to reductive groups.
- Geometric Invariant Theory (GIT) quotients.
- Actions with good invariant theoretic properties and Vinberg's θ-groups.

TEXTBOOKS:

- W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*
- E. Vinberg, V. Popov, *Invariant theory* in Algebraic geometry 4, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer Verlag.
- T. Springer, *Invariant Theory*, Springer 1977.

GRADING RULES: 1/10 of the total percent of the home assignment problems solved.

Integrability in Quantum Field Theory
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: Mikhail Alfimov.

LEARNING LOAD: two terms of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This course is organized in the form of weekly seminars, where we are going to discuss the integrability structures appearing in quantum field theory. These structures nowadays are present in numerous examples, such as sigma models, supersymmetric gauge theories, string theories, gauge/string dualities, scattering amplitudes and correlation functions etc.

PREREQUISITES: Basic knowledge of quantum field theory. Some acquaintance with conformal field theory and string theory would be helpful, but not necessary.

SYLLABUS:

- The model of Bose gas. Bethe equations for the spectrum of the Bose gas model and their thermodynamic limit. Thermodynamic Bethe Ansatz (TBA) equations for the Bose gas model.
- Integrable $O(N)$ sigma models. S-matrix as a solution of the Yang – Baxter equation. Asymptotic Bethe Ansatz Equations for large system size spectrum.
- Thermodynamic Bethe Ansatz equation for finite size spectrum of $O(N)$ sigma models.
- String background $AdS_5 \times S^5$ as the solution of the supergravity equations.
- Classical integrability of the $AdS_5 \times S^5$ superstring σ-model.
- Derivation of the S-matrix for the superstring σ-model on $AdS_5 \times S^5$ from Zamolodchikov – Faddeev algebra.
- Integrable deformations of the $O(N)$ sigma models. q-deformed S-matrix.
- η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring theory and its S-matrix.

TEXTBOOKS: Korepin, V., Bogoliubov, N., Izergin, A. (1993). Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press.
https://doi.org/10.1017/CBO9780511628832.

Beisert, N., Ahn, C., Alday, L.F. et al. Lett Math Phys (2012) 99: 3.
https://doi.org/10.1007/s11005-011-0529-2.

Eric D'Hoker and Daniel Z. Freedman (2004). Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT correspondence. Strings, Branes and Extra Dimensions: pp. 3-159.
https://doi.org/10.1142/9789812702821_0001.

GRADING RULES: The grade is the result of the participant's talk at the seminar presented in the form of LaTeX slides.

COMMENTS: This is an online inter-campus seminar.

Introduction to Ergodic Theory
a course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2 – 4 bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

PREREQUISITES: calculus.

SYLLABUS:

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural/observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

TEXTBOOKS: A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

GRADING RULES: 0.4 (Cumulative assessment) + 0.6 (Exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

INTRODUCTION TO CATEGORY THEORY AND HOMOLOGICAL ALGEBRA
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: C. BRAV.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The language of categories and functors is a universal tool for expressing the algebraic properties of objects and maps between them in a particular theory, no matter what area of mathematics it belongs to. The ability to think in this language allows you to find simple conceptual answers to many seemingly difficult questions and guess the correct formulations of new interesting problems. The aim of the course is to master categorical constructions using natural informative examples and to acquire skills in working with the main computing tool for abelian categories — complexes and their homologies.

PREREQUISITES: First year bachelor's (standard courses in algebra, analysis, geometry, combinatorics, and topology)

SYLLABUS:

- Categories, functors, presheaves. Examples: simplicial sets, presheafs on topological spaces. The category of functors, the Yoneda lemma, representable functors, and the definition of objects by universal properties.
- Adjoint functors. Limits. Filtered categories. Examples: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, non-Archimedean completion of the ring $\mathbb{Z}$, localization and non-commutative Ore fractions.
- Additive, exact, and abelian categories. Diagram chasing, exact sequence lemmas. Direct sums and products. Injective, projective, (co)generating and (co)compact objects. Characterization of categories of modules, Morita equivalence. If time permits: embedding theorem.
- Categories of complexes, homotopy and homology. Examples: a complex of chains of a simplicial set, resolutions of modules, resolutions of monomial ideals. Long exact sequence of homologies. Cone of morphism.
- Spectral sequences of an exact pair, a filtered complex and convolution of a bicomplex.
- Ext and Tor on the category of modules. Injective and projective resolutions. Multiplications and convolutions. Koszul complexes, Hilbert's syzygy theorem.
- Bar resolution. Cohomology of algebras and groups. Classifying spaces.
- If time permits: triangulated categories and a derived category from an abelian category.

TEXTBOOKS: TBA

GRADING RULES: 10 homework sheets, ungraded. Midterm (40%) and final exam (60%), closely based on problems from homework sheets.

Introduction to Commutative Algebra
a course for 2^{nd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: A. B. Pavlov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: At its most basic level, algebraic geometry is the study of the geometry of solution sets of polynomial systems of equations. Classically, the coefficients of the polynomial equations are assumed to lie in an algebraically closed field. Considering more general coefficient rings, in particular rings of integers in number fields, one arrives at modern algebraic geometry and algebraic number theory. Commutative algebra provides the tools for answering basic questions about solutions sets of polynomial systems, such as finite generation of the system, existence of solutions in some extension of the coefficient ring, dimension and irreducible components, and smoothness and singularities.

PREREQUISITES: basic courses given at the faculty of mathematics for the first 3 semesters, including basic algebra (groups, rings, fields), linear algebra (tensor products), and basic geometry

SYLLABUS:

- Rings, algebras, ideals and modules
- Noetherian rings
- Unique factorization domains
- Rings and modules of fractions
- Integral dependence and Noether's normalization theorem
- The going-up and going-down theorems
- Limits, colimits and tensor product
- Flat and projective modules
- Hilbert Nullstellensatz
- The spectrum of the ring
- Krull dimension and transcendence degree
- Primary decomposition
- Discrete valuation rings and Dedekind domains
- Dimension theory for noetherian rings
- Hilbert series

TEXTBOOKS:

- M. Reid, «Undergraduate commutative algebra.» Vol. 29. Cambridge University Press, 1995.
- M. Atiyah, «Introduction to commutative algebra.» Vol. 361. Westview press, 1994.

- G. Kemper. «A course in commutative algebra.» Vol. 256. Springer Science & Business Media, 2010.
- D. Eisenbud. «Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry.» New York, NY: Springer-Verlag, 1999.

GRADING RULES: Your final grade is a weighted sum of

- Final written exam (50%),
- Written midterm (30%),
- Small tests during seminars (30%).

AN INTRODUCTION TO FACTORISATION HOMOLOGY
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: C. BRAV, A. G. GORINOV, A. S. KHOROSHKIN.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The idea of factorisation homology is to use higher categories to construct topological invariants which are both non-trivial and computable, at least in principle. In this seminar we will cover some background material on higher caterories, including geometric, topological and lower categorical motivation. After that we will look at a few topological applications and examples in detail.

PREREQUISITES: Basic homological algebra, category theory, smooth manifolds and algebraic topology.

SYLLABUS:

1. Review of homotopy theory and operads.
2. Operad of little disks in a manifold.
3. Review of ∞-categories.
4. Definition of factorisation homology with coefficients in a disk algebra.
5. Hochschild homology.
6. Higher Hochschild homology.
7. Applications to topology of configuration spaces.
8. Locally constant factorisation algebras.
9. Ran spaces.
10. Factorisation algebras on stratified spaces.
11. Non-commutative calculus.
12. Non-abelian Poincare duality

TEXTBOOKS:

1. J. Lurie, *Higher Algebra*
2. David Ayala and John Francis, A factorization homology primer, https://arxiv.org/abs/1903.10961
3. Gregory Ginot, Notes on factorization algebras, factorization homology, and applications, https://arxiv.org/abs/1307.5213
4. Ben Knudsen, Configuration spaces in algebraic topology, https://arxiv.org/pdf/1803.11165.pdf
5. D. Gaitsgory, N. Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry. Volume I: Correspondences and duality*, freely available online at http://people.math.harvard.edu/~gaitsgde/GL/Vol1.pdf.
6. D. Gepner, *An Introduction to Higher Categorical Algebra*, https://arxiv.org/abs/1907.02904.
7. M. Groth, *A short course on ∞-categories*, https://arxiv.org/abs/1007.2925.
8. V. Hinich, *Lectures on infinity categories*, https://arxiv.org/abs/1709.06271.
9. C. Rezk, *Stuff about quasicategories*, freely available online at https://faculty.math.illinois.edu/~rezk/quasicats.pdf.

GRADING RULES: 50% seminar talk, 50% talk notes in LaTeX.

Introduction to Frobenius algebras and mirror symmetry
a seminar for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

ADVISORS: A. A. Basalaev, P. I. Dunin–Barkowski.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: *Frobenius algebra* is just an associative algebra with a unit equipped with a bilinear form and satisfying a certain simple condition called the Frobenius condition. Despite the notion of Frobenius algebras being very simple, it turns out that these objects play a profound role in many interesting areas and examples. One particular area where they naturally arise is the *singularity theory* which arises from studying cusps with behavior similar to the one of the curve $y^2 = x^3$ near $(x, y) = (0, 0)$ (compare this to the behavior of the curve $y^2 = x^3 + x^2$ near the same point).

In the present course we will start with introducing the basic concept of Frobenius algebra and discuss some examples and properties of these objects. Then we will discuss the basics of singularity theory and the relation of Frobenius algebras to this theory. Along the way we will mention the relation of all this to physics (in particular, we will discuss the so-called «two dimensional topological quantum field theories» which sound much scarier than they really are). Towards the end of the course we will touch the concept of F-manifolds, providing all the necessary preliminaries.

This course is aimed to be completely accessible for all second-year students and above.

PREREQUISITES: Algebra I, Geometry I

SYLLABUS:

1. Algebras with a pairing, Frobenius algebras. Equivalent formulations, uniqueness of the pairing, restrictions arising from the Frobenius property.
2. Examples of non-Frobenius associative commutative algebras. Formal description of Frobenius algebras in terms of the unit and the counit and the multiplication tensor. Corresponding graphs and cobordisms description.
3. Frobenius algebras coming from the singularity theory: ADE examples.
4. Root systems of the ADE type, Coxeter groups, Frobenius algebra structure on the space of invariant polynomials.
5. Frobenius algebras arising from the cohomology of manifolds. $\mathbb{CP}^n$ examples.
6. Atiyah's axioms of 2D TQFTs. Relation to physics.
7. Mirror symmetry as an isomorphism of Frobenius algebras, certain simple examples.
8. Manifolds with a product. Associative and commutative case, F-manifolds.
9. F-manifolds arising from deformations of singularities: ADE examples.

TEXTBOOKS:

- J. Kock, «Frobenius Algebras and 2d Topological Quantum Field Theories», Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- C. Hertling, «Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities», Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- S. M. Natanzon, «Geometry of two-dimensional topological field theories», MCCME, Moscow, 1998.
- V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, V. A. Vasil'ev, «Singularity Theory I», Springer, 1998.

GRADING RULES: Grading is based on the following four marks:

- $S \in [0,4]$ – the total mark for the problem sheets, a real number between 0 and 4,
- $C \in [0,4]$ – the total mark for the tests (small written tests given every few seminars), a real number between 0 and 4,
- $T \in [0,3]$ – the mark for a 30-minute talk given at one of the seminars, a real number between 0 and 3,
- $E \in [0,5]$ – the final oral exam mark, a real number between 0 and 5.

The total score for the course is computed according to the following formula:

$$\min(10, \lceil S + C + T + E \rceil),$$

where $\lceil\rceil$ stands for rounding up. If for any student $\min(10, \lceil S + C + T \rceil) \geqslant 8$ already before the final exam, this student can take this value as his or her final score and skip the exam.

INTRODUCTION TO FUNCTIONAL ANALYSIS
a course for 2nd year students and higher

LECTURER: A. YU. PIRKOVSKII.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

In this introductory course, we plan to cover the very basics of Functional Analysis (the «irreducible minimum») only.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral

SYLLABUS:

1. Normed and Banach spaces, bounded linear maps.
2. Hilbert spaces.
3. The Hahn – Banach Theorem, the Open Mapping Theorem, the Uniform Boundedness Principle.
4. Basic duality theory.
5. Elementary spectral theory.
6. Compact operators. The Hilbert – Schmidt Theorem.

TEXTBOOKS:

1. A. Ya. Helemskii. Lectures and exercises in Functional Analysis. AMS, 2006.
2. V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. Real and Functional Analysis. RCD, 2011 (in Russian).
3. A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. Theorems and problems in Functional Analysis. Springer, 1982.
4. B. Simon. Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1). AMS, 2015.
5. B. Simon. Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4). AMS, 2015.
6. M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis. Academic Press, 1972.
7. W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, 1991.
8. J. B. Conway. A course in Functional Analysis. Springer, 1990.

GRADING RULES: final grade $= 0.7 \times$ (cumulative grade) $+ 0.3 \times$ (exam grade), where cumulative grade $=$ $= 0.5 \times$ (midterm grade) $+ 0.5 \times$ (exercise sheets grade).

The oral exam will be at the end of December and will include only the material of the 2nd module.

The midterm exam (also oral) will be at the end of October (or at the beginning of November) and will include only the material of the 1st module.

To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.

You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «B» in the sheets).

Introduction to Galois theory
a course for 2^{nd} year students and higher

LECTURER: C. BRAV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Galois theory is the study of roots of polynomials and their symmetries in terms of Galois groups. As the algebraic counterpart of the fundamental group of topology, the Galois group is an essential object in algebraic geometry and number theory.

PREREQUISITES: Basic algebra: groups, rings, linear algebra over a field.

SYLLABUS:

- Review of polynomial rings and more general principal ideal domains.
- Extensions of fields, algebraic and transcendental.
- Splitting fields of polynomials and Galois groups.
- The fundamental theorem of Galois theory.
- Computing Galois groups.
- Applications.

TEXTBOOKS: J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html.

GRADING RULES: 40% midterm; 60% final. Final mark: round percent/10 to nearest integer.

Introduction to Mathematical Statistics
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: A. S. Skripchenko, A. V. Klimenko.

LEARNING LOAD: Module 2 of 2020/21 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Mathematical statistics is a way to make abstract probabilistic models applicable to some research problems in economics, physics, biology and genetics and social sciences; at the same time, it is a natural way to describe some real life processes (vaccination policy and its consequences, dynamics of commodity prices etc) in a rigorous mathematical terms. Typically the precise distribution or random process that describes some phenomenon is not known; however, some information can be extracted from the series of observations or repeated experiments; this data is used to select the most appropriate model. We will discuss the most classical aspects of mathematical statistics: parameter statistics (estimations, confidence intervals and their properties) and statistical tests.

PREREQUISITES: Basic courses of calculus (including theory of Lebesgue measure and integral) and probability. The course is designed in such a way that it can be taken on third term of Bachelor program, in parallel with the "Introduction to Probabilities" course.

SYLLABUS:

- Basic mathematical statistics (Notions, tools, general principles and possible applications in science and everyday life. Why the models may not be applicable in some real cases?)
- Statistical models, samples, descriptive statistics. (Statistical models, samples, descriptive statistics. Empirical approach: empirical distribution and Glivenko–Cantelli theorem.)
- Parametric statistics. (Estimators and their main properties. Unbiased estimators. Efficient estimators. Cramer–Rao inequality. Consistent estimators. Sufficient statistics and Fisher – Neumann factorization theorem. Rao–Blackwell theorem. Confidence intervals.)
- Statistical hypothesis testing. (Common test statistics. Null hypothesis statistical significance testing. Neumann–Pearson lemma and the most powerful test at the given significance level.)

TEXTBOOKS:

- Hogg, R. V., McKean, J. W., Craig, A. T. (2014). Introduction to Mathematical Statistics: Pearson New International Edition. Harlow: Pearson. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsebk&AN=1418145
- Larsen, R. J., Marx, M. L. (2015). An introduction to mathematical statistics and its applications. Slovenia, Europe: Prentice Hall. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&site=eds-live&db=edsbas&AN=edsbas.19D77756

GRADING RULES: The final grade is calculated by the formula $HW + E$ with standard rounding rules; if the resulting grade is outside of the interval $[0, 10]$, it is replaced by its nearest end. The first term HW is the grade for the home assignment given for 1–2 weeks; the formula for this term is given along with the assignment, approximately 70-85% of the complete solutions correspond to $HW = 10$. The second term E is the grade for the oral exam at the end of the course; E can be positive or negative. The exam is the discussion of the solutions given in the home assignments, as well as the corresponing pieces of theory. Generally $HW + E$ cannot exceed the grade given for the correct solutions of all problems that were (at least partially) solved in the assignment.

Introduction to the theory of random processes
a course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

LECTURER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and the general measure theory. The course is aimed at bachelors 2–4 courses, undergraduates and graduate students.

PREREQUISITES: calculus, probability theory

SYLLABUS:

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub/super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

TEXTBOOKS:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

GRADING RULES: 0.4 (cumulative assessment) + 0.6 (exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

MARKOV CHAINS
a course for 3^{rd} year students and higher

LECTURER: A. DYMOV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Markov chains form the simplest class of random processes for which the future does not depend on the past but depends only on the present state of the process. Being rather simple, at the same time Markov chains have deep and very beautiful mathematics. They are known as probably the most important class of random processes, in particular, because of the numerous applications in mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. Indeed, once a stochastic process is given, it is natural to simplify it by assuming that the future does not depend on the past, and often this approximation works well. The present course is the introduction to the theory of Markov chains. It will concern with their most important properties and the most known applications. The course is aimed at the 3rd and 4th year students, but is also possible for 1st and 2nd year students. The only required knowledge is the basic course of analysis and linear algebra.

PREREQUISITES: Analysis, linear algebra

SYLLABUS:

1. Markov chains with finite number of states.
2. Examples.
3. Stationary states and their existence.
4. Ergodic theorem for Markov chains with ergodic transition probability matrix.
5. Applications of the ergodic theorem. The law of large numbers for Markov chains. The Google's PageRank.
6. Perron–Frobenius theorem.
7. Topological structure of Markov Chains.
8. Periodic Markov chains.
9. Aperiodic Markov chains. Ergodic theorem for irreducible aperiodic Markov chains.

TEXTBOOKS:

1. W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 3rd ed., Wiley (1968).
2. B. V. Gnedenko, Theory of probability, 6th ed., Boca Raton, FL: CRC Press (1998).
3. J. G. Kemeny, J. L. Snell, Finite Markov chains, Springer-Verlag (1976).
4. L. B. Koralov, Ya. G. Sinai, Theory of probability and random processes, 2nd ed., Springer (2012).
5. A. N. Shiryaev, Probability, 2nd ed., Springer, New-York (1995).

GRADING RULES: $(C + E)/2$, where C denotes the current grade and E denotes the exam grade.

Differential Geometry and its applications to classical mechanics
a course for 3rd year students and higher

LECTURER: V. A. Vologodsky.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 5 credits.

DESCRIPTION: The first part of the course will be cover basic notions and results in calculus on manifolds with applications to differential equations and classical mechanics. In particular, we will review integration of differential forms, the Stokes theorem, vector fields, Noether's Theorem. Time-permitting we will discuss vector bundles, connections, curvature, the de Rham cohomology and the Chern – Weil theory.

PREREQUISITES:

SYLLABUS:

- Manifolds. Smooth manifolds and maps.
- Vector fields. Exponentiating vector fields. Lie bracket of vector fields. Applications to Lie groups.
- Differential forms. Integration. Stokes' theorem. De Rham cohomology
- Vector bundles
- Connections
- Characteristic classes.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: total grade = 0,3(grade for homework) + 0,2(grade for midterm exam) + 0,5(grade for final exam)

COMMENTS: This course is compulsory for graduate students studying in profile «Mathematics» and is called «Mathematical Methods of Science» in the official «РУП». Other students, including the undergraduate students, may take this course as a special course.

Representations and Probabilities
a seminar for 2nd year students and higher

ADVISOR: A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.

LEARNING LOAD: two terms of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: In recent decades there was an intensive development in several branches of mathematics, where constructions from representations theory or probabilities, or both play central role. In our seminar we discuss several such topics, and especially relations between them.

PREREQUISITES: Standart courses of algebra, analysis and probabilities theory are recommended, but not required.

SYLLABUS:

- Elements of stochastic processes theory. (Basic notions: independence of differences, covariance function, trajectory-wise behavior of a process. Important examples: Poisson and Wiener processes.)
- Elements of stochastic differential equations. (SDE. Ito and Stratonovitch stochastic integrals. SDEs and asymptotic representations theory.)
- Ergodic theory of group actions. (Group actions with invariant measure. Group properties and behavior of averages: amenability, growth, etc. Ergodic theorems for various classes of groups.)
- Orthogonal polynomials and random point processes. (Orthogonal polynomial ensembles. Asymptotic problems for the corresponding point processes. Their relation to functional-analytical properties of orthogonal polynomial ensembles.)
- Determinantal processes. (Definition. Correlation functions. Kernel of a process and the corresponding operator in L^2. Macchi – Soshnikov theorem. Properties of DP: rigidity, behavior of conditional measures.)
- Asymptotic representation theory (Main problems of asymptotic representation theory. Invariant measures on spaces of matrices. Distributions of spectres and their asymptotics.)

TEXTBOOKS: no.

GRADING RULES: 40%: work during the semester; 60%: final written exam. Each part of the grade can exceed 10. The student giving a talk during the semester can be exempted from the exam.

REPRESENTATIONS OF CLASSICAL GROUPS AND RELATED TOPICS
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: G. I. OLSHANSKI.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The course is focused on fundamental results of the representation theory of classical matrix groups, which find numerous applications in various domains of mathematics. Particular attention will be paid to links with algebraic combinatorics.

PREREQUISITES:

SYLLABUS: Tentative program:

- Characters of classical groups: first and second Weyl formulas
- Classical invariant theory
- Schur – Weyl duality
- Brauer duality
- Center of universal enveloping algebra and Perelomov-Popov theorem
- Capelli identity
- Highest weight representations
- Boson and fermion Howe duality
- Multidimensional interpolation polynomials
- Applications to asymptotic representation theory

TEXTBOOKS: to be added

GRADING RULES: to be added

COMMENTS: this is SkolTech course.

Smooth, PL and topological manifolds
a seminar for 3^{rd} year students and higher

ADVISOR: A. G. GORINOV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Suppose we are given a topological manifold X. When does it admit a smoothing? In other words, when does there exist a smooth manifold Y which is homeomorphic to X? And if there does, then how many, up to diffeomorphism? Surprisingly, the answer to these and similar questions can be given in terms of homotopy classes of maps into certain classifying spaces. The aim of the seminar is to provide an introduction to these topics. In particular, we will construct examples of topological manifolds that admit no PL structures and of PL manifolds that admit no smooth structures.

PREREQUISITES: The prerequisites are basic algebraic topology as covered e.g. in A. Hatcher's Algebraic topology and smooth manifolds. Some knowledge of Morse theory and surgery theory would be helpful, but we will review everything we will need.

SYLLABUS:

- Microbundles.
- The Kister-Mazur theorem; the tangent bundle of a topological manifold.
- PL manifolds and their tangent bundles.
- Classifying spaces for PL bundles.
- Obstructions to smoothing a PL manifold. The homotopy groups of $PL/DIFF$ are the groups of homotopy spheres.
- Smoothing handles.
- The product structure theorem.
- Milnor's smoothing theorem.
- $TOP/PL = K(\mathbb{Z}/2, 3)$ (a sketch).
- Examples.

TEXTBOOKS:

- *Smoothings of piecewise linear manifolds* by A. Hirsch and B. Mazur.
- *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations* by R. Kirby and L. Siebenmann.
- *Topics in geometric topology* by J. Lurie, lecture notes freely available online at http://www.math.harvard.edu/~lurie/937.html.

GRADING RULES: 100% Home exam

Smooth Structures On Manifolds
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: A. S. TIKHOMIROV.

LEARNING LOAD: Fall term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The smooth topology of four-dimensional manifolds is unique in the sense that it provides phenomena having no analogues neither in smaller, nor in higher dimensions. For instance, on many four-manifolds there were found an infinite, and on $\mathbb{R}^4$ even uncountable number of smooth structures. These phenomena were invented in 80-90-ies in the works of S.Donaldson, C. Taubes and many other geometers in connection with the application of methods of modern differential geometry to four-dimensional topology. This is a new area of mathematics lying at the junction of global analysis and gauge theory which is related to the Yang – Mills equations. Their solutions — the so-called instantons — lead to new invariants of smooth structures on four- manifolds. In this course we give an introduction to the invariants of smooth structures related to instantons and show how they work in four-dimensional topology.

PREREQUISITES: Standard courses of linear algebra and geometry are required. Familiarity with basic notions of topology and differential geometry like topological and smooth manifold, homology groups, tangent bundle, differential forms and integration on manifolds is desirable.

SYLLABUS:

1. Smooth structures on topological manifolds.
2. Vector and principal bundles. Connections
3. Curvature and characteristic classes
4. The space of connections
5. The Yang – Mills equations and the moduli space
6. Compactness and gluing theorems
7. Definite intersection forms.
8. The Donaldson polynomial invariants
9. The connected sum theorem
10. The Kobayashi – Hitchin correspondence
11. Smooth structures on complex algebraic surfaces

TEXTBOOKS:

1. Д. Фрид, К. Уленбек. Инстантоны и четырехмерные многообразия. Москва, Мир, 1988.
2. C. H.Taubes. Differential Geometry Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford Univ. Press, 2011.
3. S. K. Donaldson, P.B.Kronheimer. The Geometry of Four-Manifolds. Oxford, Clarendon Press, 1990.
4. R. Friedman, W. Morgan. Gauge Theory and the Topology of Four-Manifolds. IAS/Park City Math. Series, Vol. 4, 1997.

GRADING RULES: 0,3 (home tasks) + 0,2 (midterm) + 0,5 (final exam).

STOCHASTIC ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS IN ECONOMICS
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: V. D. KONAKOV, A. V. KOLESNIKOV.

LEARNING LOAD: two terms of 2020/21 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This seminar will cover a wide range of problems related to stochastics. The aim of this seminar is to present new developments in this field and to give students an opportunity to learn some modern concepts of stochastic analysis. Special attention will be paid to applications of stochastic models in economics and finance. The talks will be given by the members of the laboratory of stochastic analysis and its applications (lsa.hse.ru), the guests of the laboratory, the stuff of the faculty of mathematics, as well as by students and postdocs.

PREREQUISITES: Some knowledge in the mathematical analysis, probability theory, stochastic processes is expected.

SYLLABUS: The seminar covers a wide range of topics, in particular:

1. transportation theory, Monge-Kantorovich problem;
2. discretization and approximation schemes for stochastic differential equations;
3. Levy-based models motivated by economical problems;
4. information theory and Turing's formula;
5. semimartingales and applications to the financial mathematics;
6. modelling extremal events for insurance and finance;
7. non- and semi-parametric statistical models;
8. stochastic modelling in physics (random energy model), biology (cell-growth model) and other natural sciences.

TEXTBOOKS: no.

GRADING RULES: Students should make a presentation on the seminar, and will get a mark for it.

THE WEIL CONJECTURES
a seminar for 3rd year students and higher

ADVISOR: V. A. VOLOGODSKY.

LEARNING LOAD: Spring term of 2020/21 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The course will cover a proof of the Weil conjectures on Zeta functions of algebraic varieties over finite fields due to Grothendieck and Deligne. Along the course students will learn about etale cohomology, the Poincare duality, the Lefschetz fixed point theorem, vanishing cycles, and the Picard – Lefschetz formula.

PREREQUISITES:

SYLLABUS:

- Zeta functions of varieties over finite fields.
- Proof of Weil's conjectures for curves.
- Grothendieck topology.
- Faithfully flat descent.
- Etale cohomology.
- Computations for curves.
- The Poincare duality and the Lefschetz fixed point.
- Vanishing cycles and the Picard-Lefschetz formula.
- Proof of Weil's conjectures.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: The couse grade will be equal to the take home final exam grade given at the end of the semester. For the full mark it suffices to do correctly 75% exam problems.