

Задание к теме "Группа кос"

-1-

- 1a) Расклассифицируйте все неэквивалентные неразложимые представления группы кос

$$\rho_V : V_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V),$$

где V - двумерное линейное пространство.

- 1b) Какие из этих представлений неприводимы?

Подсказка: решение упрощается, если учесть, что v_1 и v_2 сопряжены друг другу, а значит имеют одинаковые спектральные инварианты в любом представлении V_3 .

- 2) Проверьте, что группу кос V_n можно задать с помощью только двух образующих: $v_1^{\pm 1}$ и $s_n^{\pm 1}$ (см. стр. 11 записок лекций). Выведите все соотношения для таких генераторов.

- 3) Проверьте, что группу кос V_n можно задать с помощью генераторов зацеплений v_{ij} (стр. 11 записок), и выведите все соотношения на них.

- 4) Закончите доказательство Леммы 1 записок (стр. 13), то есть проверьте формулы сопряжения генераторов краешних кос A_{ij} (формулы (8) на стр. 15)

5a) Проверьте выполнение соотношений
 Лемма 2 для генераторов A_{ij} группы краевых кос P_n (см. на стр. 15-16 записок).

Реш: достаточно возвести эти соотношения в P_4

5b)* Возведите соотношения сопряжения для генераторов A_{ij} краевых кос (соотношения приведены на стр стр 16 записок)

Реш: Соотношения сопряжения в результате помогают доказать, что нормальное замыкание $\langle \{A_{in}\}_{i=1, \dots, n-1} \rangle$ набора элементов A_{in} в группе P_n порождается элементами $A_{in}, i=1, \dots, n-1$.

6) Пусть F - свободная группа; $\{A\}$ и $\{B\}$ - два набора элементов этой группы; $\langle \{A\} \rangle$ и $\langle \{B\} \rangle$ - их нормальные замыкания в F .

Докажите изоморфность фактор-групп

$$(F / \langle \{A\} \rangle) / \langle \{B\} \rangle \cong (F / \langle \{B\} \rangle) / \langle \{A\} \rangle \cong F / \langle \{A, B\} \rangle$$

7) Разнообразные группы кос можно строить по графам, рёбра которых снабжены кратностями.

При этом каждой вершине графа сопоставляется генератор группы кос, а пара генераторов v_α и v_β , чьи вершины соединены ребром кратности $k \geq 0$ (см. Рис):



7a* Проверьте, что внутренний автоморфизм группы кос типа B_{n-1} , задаваемый элементом

$$c = v_{n-1} v_{n-2} \dots v_1 v_0$$

порождает циклический сдвиг генераторов v_i .

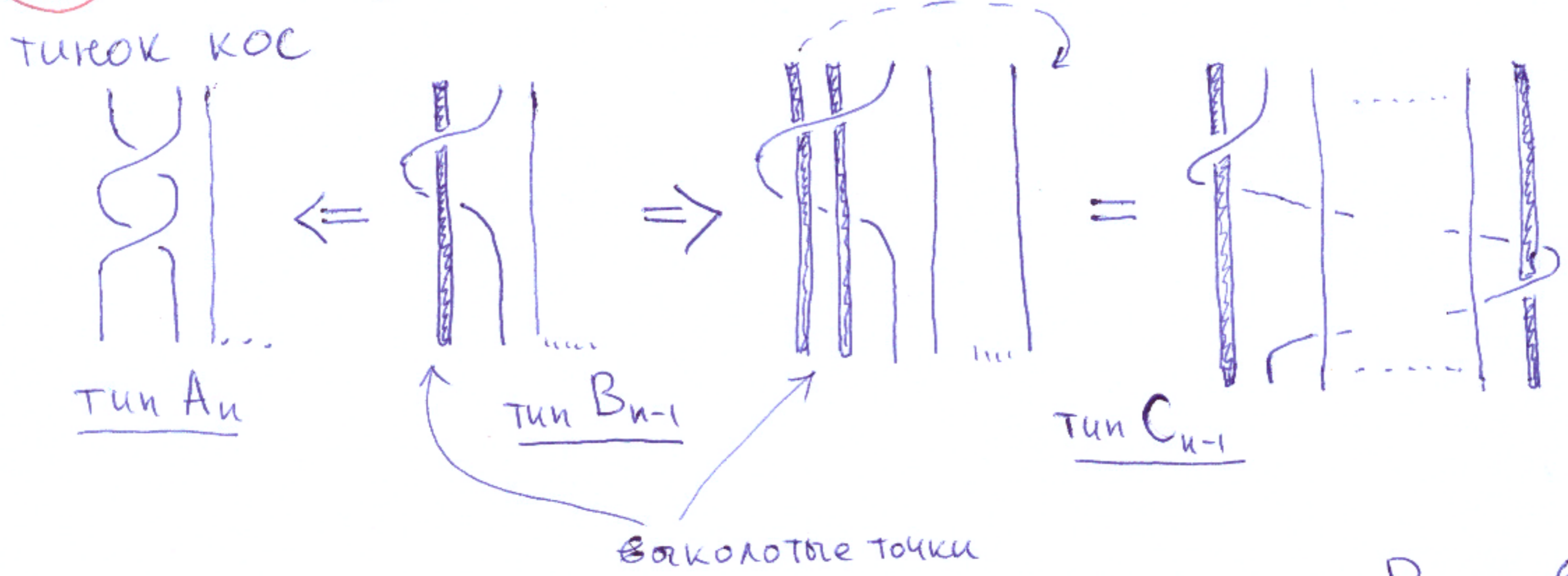
$$\begin{cases} v_{i+1} = c^{-1} v_i c \text{ для } i=1, \dots, n-2 \\ v_1 = c^{-2} v_{n-1} c^2 \end{cases}$$

Убедитесь, что отображение

$$\begin{cases} v_i \mapsto v_i \quad i=1, \dots, n-1 \\ v_0 \mapsto c^{-1} v_{n-1} c \end{cases}$$

порождает гомоморфизм группы кос типа \tilde{A}_{n-1} в группу кос типа B_{n-1} .

7b* Пользуясь естественными сопоставлениями картинок кос



определите гомоморфизмы группы кос типа B_{n-1} в группы кос типов A_n и C_{n-1} .

Замечательный коммутативный набор элементов Юлиса-Мэрфи в группе кос типа B_{n-1} задаётся формулами:

$$\begin{cases} J_1 := 1, J_2 := v_0, \\ J_{i+1} := v_{i-1} J_i v_{i-1} \end{cases}$$

Убедитесь в коммутативности этого набора.

Пользуясь ранее определёнными гомоморфизмами, задайте набор элементов Тьюнга-Мэрдри в группах кос типов A_n и S_{n-1} .