Теория функций комплексного переменного – 2022
семинар 1, 14 января 2022

1. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:
(а) $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$, (б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$, (в) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$, (г) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

2. Найдите модули и аргументы следующих комплексных чисел:
(а) $(\sqrt{3}-i)^{2020}$, (б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$, (в) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$, $\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,
(г) $\dfrac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}$, $\quad 0<\alpha<2\pi$.

3. Докажите, что многочлен $f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n-\cos n\alpha-x\sin n\alpha$ делится на x^2+1.

4. Выразите $\sin 4x$ как многочлен от $\sin x$, $\cos x$.

5. Решите уравнение $\bar{z}=z^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

6. Решите уравнения $z^2=5-12i$, $z^2+4=0$.

7. Пусть $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ – все корни уравнения $z^n=1$, где n – натуральное число. Найдите сумму $\zeta_1^k+\ldots+\zeta_n^k$ для каждого натурального k.

8. Точки z_1 и z_2 – смежные вершины правильного n-угольника. Найдите вершину z_3, смежную с z_2 ($z_3\neq z_1$, нумерация против часовой стрелки).

9. Докажите, что комплексные числа a,b,c представляют вершины равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac.$$

10. Найдите произведение длин отрезков, соединяющих вершину правильного n-угольника со всеми остальными вершинами, если длина стороны равна 1.

11. Дайте геометрическое описание множеств
(а) $\{z\colon |z-z_1|=|z-z_2|\}$,
(б) $\{z\colon |z-1|+|z+1|=2a\}$ $(a>1)$,
(в) $\{z\colon \mathrm{Re}(1/z)=\frac{1}{2}\}$.

12. Пусть a,b,c,d – четыре различные точки на единичной окружности. Найдите точку перечесения прямых ab и cd.

13. Докажите равенство

$$|\sqrt{z^2-1}+z|+|\sqrt{z^2-1}-z|=|z-1|+|z+1|.$$

14. Найдите, во что переводят координатную сетку следующие отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$: (а) $z \mapsto z^2$; (б) $z \mapsto e^z$; (в) $z \mapsto 1/z$.

15. Отображение $z \mapsto z + (1/z)$ определено на множестве всех ненулевых комплексных чисел.

(а) Во что это отображение переводит множество $\{z\colon |z| > 1\}$?

(б) Является ли это отображение взаимно-однозначным на данном множестве?

16. Пусть $A > 0, C$ действительные, а B – комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Докажите, что уравнение

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

является уравнением окружности и найдите центр этой окружности и ее радиус.

17. Пусть отображение задано формулой $z \mapsto Az + B\bar{z}$. Во что оно переводит окружность с центром в нуле?