Семинар 3.

Всюду char $\mathbf{k} \neq 2$.

Задача 1. (Это задача 5 из семинара 2.)
1) Пусть Q - квадрика Штейнера и $a \in Q$. Покажите, что $\mathbb{T}_a Q$ - плоскость. Как геометрически построить плоскость $\mathbb{T}_a Q$?
2) Опишите пересечение $Q \cap \mathbb{T}_a Q$.

Задача 2. В проективном пространстве $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ дана квадрика Q с уравнением $F(x) = 0$, где $F(x) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} x_i x_j$ - квадратичная форма. Для произвольной точки $a = (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n$ мы определили поляру $p_a Q$ точки a относительно квадрики Q как подпространство в $\mathbb{P}^n$, заданное (линейным по x) уравнением $\widetilde{F}(a, x) = 0$, где билинейная форма $\widetilde{F}(x, y)$ есть поляризация квадратичной формы F. Докажите, что уравнение поляры $p_a Q$ можно записать в следующем равносильном виде:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Задача 3. Как изменится уравнение (1) при переходе от проективных координат $(x_0 : ... : x_n)$ к новым координатам $(x'_0 : ... : x'_n)$, где $x'_i = \sum_{j=0}^n b_{ij} x_j$, а $B = (b_{ij})$ - невырожденная матрица?

Задача 4. При каком условии на матрицу $A = (a_{ij})$ квадратичной формы F существуют такие точки $a = (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n$, что $p_a Q = \mathbb{P}^n$? Опишите множество таких точек a.
(*Указание.* Рассмотрите ядро билинейной формы поляризации $\widetilde{F} : V \to V^*$.)

Задача 5. Пусть $a \in Q$. Докажите, что $p_a Q = \mathbb{T}_a Q$.

Задача 6. Множество точек $a \in Q$, для которых $\mathbb{T}_a Q = \mathbb{P}^n$, Называется множеством особых точек кважрики Q и обозначается Sing Q. Как связано Sing Q с $\ker \widetilde{F}$?