Семинар 17

1. Пусть $L = K(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Если два автоморфизма поля L совпадают на всех элементах a_i $(i = 1, \ldots, m)$, то они совпадают на всех числах поля L. Доказать.

2. Доказать, что порядок группы Галуа неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена степени n делит $n!$ и делится на n.

3. Доказать, что группа Галуа конечного поля $\mathbb{F}_q$, $q = p^n$, циклическая и порождена автоморфизмом $x \to x^p$.

4. Доказать, что группа Галуа над $\mathbb{Q}$ неприводимого кубического многочлена с одним вещественным корнем изоморфна группе S_3. Привести пример такого многочлена.

5. Доказать, что группа Галуа над $\mathbb{Q}$ неприводимого многочлена пятой степени ровно с тремя вещественными корнями изоморфна группе S_5. Привести пример такого многочлена.

6. Рассмотрим конечное расширение $L|\mathbb{Q}$. Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, $n = \deg[L|\mathbb{Q}]$ – множество всех гомоморфизмов поля L в алгебраическое замыкание поля рациональных чисел. Предположим, что в L существует такой элемент α, что все числа $\phi_i(\alpha)$ различны. Доказать, что $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

7. Попробовать доказать с помощью результата задачи 6 (или любым иным способом) утверждение о том, что любое конечное расширение поля рациональных чисел просто (С: этот факт достаточно доказать для двух последовательных простых расширений).

8. Найти группу Галуа над $\mathbb{Q}$ многочленов $X^4 - 2, X^4 + 2, X^3 + X + 1$.

9. Известно, что степень любого числа из конечного расширения поля $\mathbb{Q}$ не превосходит ста. Верно ли, что степень этого расширения не превосходит ста?

10. Построить расширение Галуа над полем $\mathbb{Q}$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.