А. К. Погребков

Введение в теорию интегральных уравнений

Высшая школа экономики
2-й семестр 2021/2022 гг.

Содержание

1. Лекция

1.1. **Стандартная терминология.** Мы будем называть действительную функцию $f(x)$ квадратично интегрируемой (синонимы: квадратично суммируемой, интегрируемой с квадратом) на отрезке $[a, b]$, если $f^2(x)$ интегрируема на $[a, b]$. То же самое для комплексно значной функции $f(x)$: она квадратично интегрируема на отрезке $[a, b]$, если $|f(x)|^2$ интегрируем на $[a, b]$.

Множество всех квадратично интегрируемых на $[a, b]$ функций мы обозначаем $L^2(a, b)$ или просто L^2. Вообще говоря, под интегрируемостью мы понимаем измеримость по Лебегу. При этом функции равые почти всюду считаются одним и тем же элементом L^2. Совокупность всех интегрируемых на $[a, b]$ функций обычно обозначают $L^1(a, b)$ или просто L^1.

Приведем несколько освовых свойств функций из L^2:

(1) Сумма двух квадратичо интегрируемых функций есть квадратично интегрируемая функция.
(2) Произведение квадратично интегрируемой функции на константу есть квадратично интегрируемая функция.
(3) Произведение двух квадратично интегрируемых функций есть интегрируемая функция.
(4) Если действительные функции $f(x)$ и $g(x)$ из L^2, то имеет место неравенство Буняковского–Шварца

$$(f, g)^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2, \qquad (f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx, \qquad \|f\|^2 = (f, f) = \int\limits_a^b f(x)^2 dx.$$

Здесь число (f, g) называется скалярым произведением действительных функций $f(x)$ и $g(x)$, а число $\|f\|$ – нормой действительной функции $f(x)$ в L^2.

Для случая комплекснозначных функций из L^2 указанные соотошения имеют вид

$$|(f, g)|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2, \qquad (f, g) = \int\limits_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \qquad \|f\|^2 = (f, f) = \int\limits_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексно сопряженную величину. Для действительных функций действительного аргумента $\overline{g(x)} = g(x)$.

(5) Для $f(x)$ и $g(x)$ из L^2 имеет место неравенство треугольника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

(6) Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ квадратично интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Если

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)$.

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из L^2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L^2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Аналогичным образом вводится понятие интегрируемой (суммируемой) функции нескольких переменных. Например, функция $f(x,t)$ называется квадратично интегрируемой в области $S = \{a \le x \le b; a \le t \le b\}$, если $f(x,t)$ измерима и

$$\|f\|^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |f(x,t)|^2 dxdt < +\infty.$$

Здесь, как и ранее $\|f\|$ обозначает норму функции $f(x,t)$.

1.2. **Основные определения.** Интегральные уравнения – уравнения, содержащие искомую функцию под знаком интеграла. Пример интегрального уравнения относительно функции $\varphi(\xi)$ представляет собой уравнение:

$$a(x)\varphi(x) + f(x) = \int\limits_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \tag{1.1}$$

где $a(x)$, $f(x)$, $K(x,\xi)$ – известные функции, $\varphi(x)$ – неизвестная функция; переменная x принимает, так же как и ξ, все значения из интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Мы будем рассматривать только уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно, т.е. только уравнения вида (1.1), называемые линейными интегральными уравнениями. В случае когда $a(x)$ не обращается в нуль на интервале (a,b) можно разделить обе части уравнения (1.1) на $a(x)$, что дает

$$\varphi(x) = \int\limits_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + f(x). \tag{1.2}$$

Уравнения вида (1.2) называются линейными интегральными уравнениями 2-го рода, либо интегральными уравнениями Фредгольма (шведский математик, 1866–1927, ввёл и затем анализировал целый этот класс интегральных уравнений). Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется однородным. Если $a(x) \equiv 0$ а $f(x) \neq 0$, то уравнение (1.1) сводится к виду

$$\int\limits_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1.3}$$

которое называется линейным интегральным уравнением 1-го рода, однако в дальнейшем мы будем главным образом заниматься линейными интегральными уравнениями 2-го рода. Функция $K(x,\xi)$ называется ядром интегрального уравнения.

Можно рассматривать интегральные уравнения, где неизвестные функции зависят не от одного аргумента, а от многих. Таким будет, например, уравнение

$$\varphi(x,y) = \int\limits_G K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + f(x,y) \tag{1.4}$$

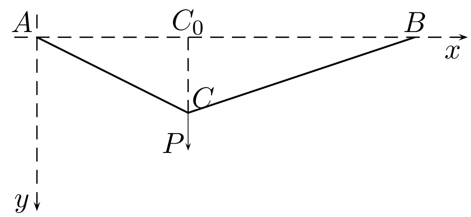

Рис. 1

относительно неизвестной функции $\varphi(x, y)$, где интегрирование распространяется по некоторой области G на плоскости (ξ, η). Точка (x, y) также принадлежит этой области. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varphi(x) = \int\limits_G K(x; \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{1.5}$$

где $x \in G$ и $\xi \in G$. Т.е. мы обозначили вектор (x, y) через x, вектор (ξ, η) через η и, строго говоря, следовало бы использовать обозначение $d^2\xi$, но для простоты мы этого делать не будем. Конечно, допускается рассмотрение систем интегральных уравнений со многими неизвестными функциями.

Замечание 1.1. *Всюду в дальнейшем (если не оговорено особо), мы будем предполагать, что рассматриваемые функции точек x или ξ определены в конечной d-мерной области G, что они непрерывны в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы будем считать состоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d = 2$. Интегрирование всюду в дальнейшем (с той же оговоркой) мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.*

1.3. **Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям.** Пусть A и B – неподвижные точки, расположенные на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси, причем ось x будем считать горизонтальной. Рассмотрим упругую нить длины ℓ, закрепленную в точках A и B, которая без всякого сопротивления легко изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на $\Delta\ell$ по закону Гука нужна сила $c\Delta\ell$, где c – некоторая постоянная. На нить действует очень большая (по сравнению с другими силами) горизонтальная растягивающая сила T_0. Под ее воздействием положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox. Пусть в точке C, для которой $x = \xi$, к нити приложена вертикальная сила P, так что нить принимает форму ломанной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0 = \delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B, что естественно в предположении малости P по сравнению с T_0. Пренебрегая δ^2 по сравнению с l, мы полагаем, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P и пренебрегая опять членами, содержащими δ^2, получим:

$$T_0\frac{\delta}{\xi} + T_0\frac{\delta}{\ell-\xi} = P,$$

так что

$$\delta = \frac{P(\ell-\xi)\xi}{T_0\ell}.$$

Обозначим через $y(x)$ возникший прогиб нити в точке с абсциссой x. Мы получим отсюда, что

$$y(x) = P\cdot G(x,\xi),$$

где

$$\begin{cases} G(x,\xi) = \dfrac{x(\ell-\xi)}{T_0\ell} & \text{для участка } AC \quad (0\le x\le \xi), \\ G(x,\xi) = \dfrac{(\ell-x)\xi}{T_0\ell} & \text{для участка } CB \quad (\xi\le x\le \ell), \end{cases} \tag{1.6}$$

откуда, в частности, следует

$$G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

Предположим далее, что на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$ так, что на участок ее между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$ действующая сила приблизительно равна $p(\xi)\Delta\xi$. В силу принципа суперпозиции смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\Delta\xi$, суммируются. Таким образом под действием такой силы нить принимает форму

$$y(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi.$$

Рассмотрим следующие примеры.

1. Пусть задана форма $y=y(x)$ нити. Найдем плотность распределения силы $p(\xi)$, под влиянием которой нить примет эту форму. Это означает, что мы должны решить интегральное уравнение 1-го рода

$$y(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi \tag{1.7}$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке ξ равной

$$p(\xi)\sin\omega t \quad (\omega>0).$$

Предположим, что под действием этой силы абсцисса каждой точки не меняется, а нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x)\sin\omega t.$$

Пусть $\rho(\xi)$ означает линейную плотность массы нити в точке ξ. Тогда в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$, помимо силы $(p(\xi)\sin\omega t)\Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\rho(\xi)\Delta\xi\frac{d^2y}{dt^2} = (\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t)\Delta\xi.$$

Теперь равенство (1.7) примет вид:

$$y(x)\sin\omega t = \int_0^\ell G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t + \omega^2\rho(\xi)\sin\omega t]d\xi,$$

так что сокращая обе части на $\sin\omega t$ и обозначая

$$\int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi = f(x), \qquad G(x,\xi)\rho(\xi) = K(x,\xi), \qquad \omega^2 = \lambda,$$

мы находим:

$$y(x) = \lambda\int_0^\ell K(x,\xi)y(\xi)d\xi + f(x). \tag{1.8}$$

Функция $p(\xi)$ задана по условию, а тогда задана и функция $f(x)$, причем в силу определения (1.6)

$$f(0) = f(\ell) = 0.$$

Итак, мы пришли к интегральному уравнению Фредгольма для определения функции $y(x)$.

Рассмотрим случай, когда $\rho(\xi)$ постоянна и пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае данное интегральное уравнение нетрудно решить. Для этого подставим в $K(x,\xi)$ вместо $G(x,\xi)$ его выражение (1.6). Получим

$$y(x) = \omega^2\rho\int\limits_0^x \frac{(\ell-x)\xi}{T_0\ell}y(\xi)\,d\xi + \omega^2\rho\int\limits_x^\ell \frac{x(\ell-\xi)}{T_0\ell}y(\xi)\,d\xi + f(x),$$

или

$$y(x) = \frac{\omega^2 c}{\ell}(\ell-x)\int\limits_0^x \xi y(\xi)\,d\xi + \frac{\omega^2 cx}{\ell}\int\limits_x^\ell(\ell-\xi)y(\xi)\,d\xi + f(x),$$

где введена константа

$$c = \frac{\rho}{T_0}.$$

Дифференцируя два раза по x обе части этого уравнения, получим:

$$y''(x) = -\omega^2 cy(x) + f''(x). \tag{1.9}$$

Нетрудно доказать и обратное: всякое решение дифференциального уравнения (1.9), обращающееся в нуль при $x = 0$ и $x = \ell$, является также решением интегрального уравнения (1.8). Для этого заметим, что интегрируя по частям легко получить

$$\int\limits_0^\ell T_0 G(x,\xi)\varphi''(\xi)\,d\xi = -\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$ и $x = \ell$. Так что применяя эту операцию к (1.9) мы получим при этом равенство (1.8). Далее, как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общим решением уравнения (1.9) является

$$y = C_1\sin\mu x + C_2\cos\mu x + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi,$$

где $\mu = \omega\sqrt{c}$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из равенств (1.6) и (1.9) следует, что $y(0) = y(\ell) = 0$, что определяет константы C_1 и C_2. Тогда при $\sin\mu\ell \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\ell}\int\limits_0^\ell f''(\xi)\sin\mu(\ell-\xi)\,d\xi + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi. \tag{1.10}$$

Итак, мы доказали, что при условии $\sin\mu\ell \neq 0$ интегральное уравнение (1.8) имеет единственное решение, где функция $f(x)$ произвольная, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяющая условию $f(0) = f(\ell) = 0$.

На самом деле можно показать, что требование существования и тем более непрерывности второй производной является излишним для существования решения интегрального уравнения (1.8). Для доказательства достаточно, если $\sin\mu\ell \neq 0$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной. Условие же $\sin\mu\ell \neq 0$ совершенно необходимо для того, чтобы это интегральное уравнение имело решение при всякой непрерывной или при всякой сколько угодно раз дифференцируемой функции $f(x)$.

1.4. **Дискретный спектр.** Рассмотрим теперь случай $\sin\mu\ell = 0$. Тогда получаем

$$\mu = \frac{k\pi}{\ell}, \tag{1.11}$$

$$\omega = \frac{k\pi}{\ell\sqrt{c}}, \tag{1.12}$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2 c}, \tag{1.13}$$

где k – произвольное целое число, т.е. $k \in \mathbb{Z}$. **Собственным значением** параметра λ в интегральном уравнении (1.8) называется значение λ, задаваемое формулой (1.13) при $k = 1, 2, 3, \ldots$, а соответствующие значения параметра ω называются **собственными частотами** колебаний струны.

Для разрешимости уравнения (1.8) в случае, когда $\sin\mu\ell = 0$ и функция $f(x)$ обладает второй непрерывной производной, необходимо, как следует из (1.10), чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^\ell f''(\xi)\sin\mu(\ell-\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.14}$$

Интегрируя по частям и используя, что при $\xi = 0$ и $\xi = \ell$ обращаются в нуль $\sin\mu(\ell-\xi)$ и $f(\xi)$, мы приводим это условие к виду

$$\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\mu\xi\,d\xi = 0. \tag{1.15}$$

Легко понять, что равенство (1.15) также и достаточно для существования решения уравнения (1.8) при μ таком, что $\sin\mu\ell = 0$.

Важно подчеркнуть, что условие (1.15) удовлетворяется, в частности, если

$$f(x) \equiv 0.$$

В этом случае интегральное и дифференциальное уравнения (1.8) и (1.9) превращаются в однородные. Хорошо известно, что все решения однородного дифференциального уравнения (1.9), обращающиеся в 0 при $x = 0$ и $x = \ell$, даются формулой

$$y(x) = C\sin\mu_k x. \tag{1.16}$$

Соответственно то же свойство имеют и все решения интегрального уравнения (1.8). В (1.16) C – произвольная постоянная, а μ_k равно одному из чисел из набора (1.11). Итак, формула (1.16) дает амплитуды в точке x **собственных колебаний** струны:

$$y = C\sin\mu_k x\sin\omega_k t,$$

т.е. колебаний, происходящих без воздействия внешней силы. Как следует из нашего построения, такие колебания могут происходить только с одной из частот, даваемых формулой (1.12) при $k = 1, 2, \ldots$, а отнюдь не с произвольной частотой. Как следует из формулы (1.10), если условие (1.14) не выполняется, то амплитуда $y(x)$ периодических колебаний струны в точке x бесконечно растет, когда ω – частота колебаний внешней силы – приближается к одной из собственных частот колебаний струны. В пределе при совпадении этих частот наступает резонанс. Тогда, при произвольных амплитудах внешней силы, не существует периодических колебаний струны. Соответственно этому, вообще говоря, не существует решения неоднородного интегрального уравнения (1.8) при λ, равном одному из собственных значений этого уравнения.

2. Лекция

2.1. **От линейных алгебраических уравнений к линейным интегральным: теоремы Фредгольма.** Рассмотрим линейное интегральное уравнение 2-го рода, т.е. уравнение Фредгольма:

$$y(x) = \int\limits_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi + f(x). \tag{2.1}$$

Как и ранее, мы считаем функции $K(x,\xi)$ и $f(x)$ при $a \le x \le b$, $a \le \xi \le b$, известными. Введем дискретную аппроксимацию интеграла в (2.1), для чего разобьем интервал (a,b) на n одинаковых интервалов, длина каждого из которых равна:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta\xi.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&K(a+p\Delta x, a+q\Delta\xi) = K_{pq} \qquad (p,q = 1,2,\ldots,n),\\
&y(a+p\Delta x) = y_p \qquad (p = 1,2,\ldots,n),\\
&f(a+p\Delta x) = f_p \qquad (p = 1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

В частности это означает, что мы полагаем $x = a + p\Delta x$, так что интеграл $\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi$ заменяется суммой

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\Delta\xi, \qquad p = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда вместо интегрального уравнения (2.1) получится система линейных алгебраических уравнений

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\Delta\xi + f_p, \quad p = 1,2,\ldots,n. \tag{2.2}$$

В соответствии с тем, что говорилось после (2.1) матрица K_{pq}, вектор f_p и число $\Delta\xi$ – известные величины, а y_p – неизвестные. Вспомним известные теоремы о линейных алгебраических уравнениях на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. В данный момент мы не будем пользоваться столь хорошо известными величинами, как определители. Этот подход будет представлен позже. Сейчас мы сформулируем эти теоремы, не пользуясь определителями.

Однако, мы начнем именно с определителей, поскольку при решении системы (2.2) существенную роль играет составленный из коэффициентов этой системы определитель

$$\begin{vmatrix}
1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi\\
-K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
-K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1-K_{nn}\Delta\xi
\end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Хорошо известно, что если этот определитель не равен 0, то система (2.2) при любых значениях $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеет одно и только одно решение. Более того, в этом случае транспонированная система, т.е. система

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, 2, \ldots, n$$

также имеет, и притом единственное, решение при произвольных f_p^*. Если же определитель равен нулю, то система (2.2) при произвольных f_p, вообще говоря, не имеет решения. Но тогда соответствующая однородная система, т.е. система, полученная из (2.2) приравниванием нулю всех f_p, всегда имеет нетривиальное решение, т.е. решение, состоящее не из одних только нулей.

Итак, имеет место следующая альтернатива: *или данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений (2.2) имеет, и притом только единственное, решение при всяких $f_1, \ldots, f_n$, стоящих в правых частях, или соответствующая однородная система имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Если для данной системы имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированной системы.*

Во втором случае однородная система, следующая из (2.2),

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

имеет то же число линейно независимых решений, что и транспонированная к ней система

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

В случае линейной алгебры это число равно $n - r$, где r – ранг матрицы определителя (2.3). Нужно заметить, что утверждение о существовании ровно $n-r$ линейно независимых решений у однородных систем (2.4) и (2.5) верно и в первом случае альтернативы, когда $n = r$. Выражение "нуль линейно независимых решений" означает, что имеется лишь решение, состоящее из одних нулей.

Рассмотрим необходимые и достаточные условия существования при втором случае альтернативы решения для неоднородной системы (2.2). Необходимое условие здесь находится просто. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – какое-нибудь решение системы (2.5). Умножим тогда p-ое уравнение из (2.2) на z и сложим все уравнения почленно. Мы получаем:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{pq} y_q z_p \Delta\xi = \sum_p f_p z_p.$$

Переобозначим p и q в двойной сумме в левой части этого равенства:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{qp} y_p z_q \Delta\xi = \sum_p y_p \left(z_p - \sum_q K_{qp} z_q \Delta\xi \right),$$

что дает ноль ввиду уравнений (2.5). Следовательно, должно быть

$$\sum_p f_p z_p = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство того, что равенство (2.6) является также и достаточным условием для существования решения системы (2.2), если оно выполняется для всех решений системы (2.5), несколько сложнее. Очевидно, это условие будет соблюдено, если оно выполняется для каких-нибудь $n-r$ линейно независимых между собой решений системы (2.5).

Утверждение из курса высшей алгебры про достаточное условие существования решения у системы (2.2) в случае, когда ее определитель равен нулю: ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \dots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \dots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \dots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix}\right\|. \tag{2.7}$$

должен совпадать с рангом матрицы (2.3). Поскольку мы обозначили ранг матрицы через r, то достаточно, чтобы равнялись нулю все определители $r+1$-го порядка, составленные из элементов матрицы (2.7) и последнего столбца этой матрицы. Обозначим через D_{r+1} произвольный такой определитель и раскроем его по элементам f_k, т.е. по последнему столбцу. Составим теперь набор чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

следующим образом: если i таково, что f_i входит в определитель D_{r+1} то z_i равно алгебраическому дополнению f_i в этом определителе, в противном случае $z_i = 0$. Такой набор удовлетворяет системе (2.5). Это следует из подстановки чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ в j-ое уравнение системы (2.5). Если j таково, что в определитель D_{r+1} входят элементы j-го столбца матрицы (2.7), то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю, в котором совпадают два столбца. Если j таково, что элементы j-го столбца не входят в определитель D_{r+1}, то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю $r+1$-го порядка, составленному из элементов матрицы ранга r. Но таким образом мы получаем, что D_{r+1} совпадает с левой частью равенства (2.6), т.е. он действительно равен нулю.

Итак, *во втором случае альтернативы решение неоднородной системы существует тогда и только тогда, когда для любого решения $(z_1, \dots, z_n)$ транспонированной однородной системы выполняется условие (2.6).*

Заметим, что если во втором случае альтернативы система (2.2) имеет решение, то это решение не единственное. Действительно, прибавляя к этому решению какое-нибудь решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (2.2).

Когда $\Delta\xi$ стремится к 0, естественно ожидать, что $\sum_q K_{pq}y_q\Delta\xi$ переходит в $\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi$, и решение системы уравнений (2.2) переходит в решение интегрального уравнения (2.1). Это действительно имеет место при некоторых предположениях относительно ядра $K(x,\xi)$. Но доказательство этого громоздко, и мы не будем его приводить, хотя для приближенного решения интегрального уравнения (2.1) иногда его заменяют системой (2.2). Мы докажем только, что теоремы, сформулированные выше для системы (2.2), переходят в следующие теоремы:

Теорема 2.1 (1. (Альтернатива))**.** *Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода имеет, и притом единственное, решение при всякой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т.е. не равное нулю тождественно, решение.*

Теорема 2.2 (2). *Если для данного уравнения (2.1) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x) = \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f^*(x).$$

Данное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Очевидно, если функции $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (2.1), то любая их линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ с постоянными коэффициентами C_i (также удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 2.3 (3). *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения (2.1) является условие:*

$$\int f(x) z(x) dx = 0,$$

где $z(x)$ – любое решение транспонированного к уравнению (2.1) однородного уравнения.

Если это условие выполнено, то уравнение (2.1) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению будет удовлетворять также любая функция вида

$$y(x) + \varphi(x),$$

где $y(x)$ – какое-нибудь решение уравнения (2.1), а $\varphi(x)$ – любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению (2.1) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению. Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются теоремами Фредгольма, который их впервые доказал для уравнения (2.1) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие лекции посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно и мы сохраняем для них те же обозначения x, ξ и т.п. Эти доказательства, как вообще большинство доказательств существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (2.1).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма – об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (2.1) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонированное к нему имеет только тривиальные решения. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, будет следовать, что данное уравнение (2.1) действительно имеет решение.

2.2. **Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.** Существует специальный класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Это уравнения с вырожденными ядрами и для этих уравнений теоремы Фредгольма непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущей лекции для линейных алгебраических уравнений. План наших действий следующий: сначала мы докажем теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами, а далее мы используем эти доказательства для доказательства теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.

Итак, ядро называется вырожденным, если оно имеет вид

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(\xi), \tag{2.8}$$

где m какое-то натуральное число. Будем полагать, что функции a_i, b_i, $y(\xi)$ и $f(x)$ равномерно непрерывны на некоторой конечной области G и что все как $a_i(x)$, так и $b_i(\xi)$ линейно независимы между собой. Последнее предположение не ограничивает общности. Для доказательства этого факта допустим, что существуют такие постоянные $C_1,\ldots,C_m$, что

$$C_1a_1(x)+\ldots+C_ma_m(x)\equiv 0,$$

где хотя бы одно из чисел $C_1,\ldots,C_m$ отлично от нуля. Пусть это $C_m\neq 0$. Поделив это равенство на C_m, решим его относительно $a_m(x)$:

$$a_m(x)=C_1^*a_1(x)+\ldots+C_{m-1}^*a_{m-1}(x),$$

где C_i^* – новые значения констант. Подставляя $a_m(x)$ в правую часть (2.8), получим:

$$\begin{aligned}K(x,\xi)&\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)b_i(\xi)+\sum_{i=1}^{m-1}C_i^*a_i(x)b_m(\xi)\equiv\\&\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)[b_i(\xi)+C_i^*b_m(\xi)]\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)b_i^*(\xi).\end{aligned}$$

Таким образом, тот факт, что ядро $K(x,\xi)$ может быть представлено в виде (2.8) сохранился, но количество членов стало меньше, чем m числа произведений функций от x на функции от ξ. Понятно, что этот процесс можно продолжить, если окажется, что новые функции $a_i(x)$ или $b_i^*(\xi)$, $i=1,\ldots,m-1$, опять линейно зависимы. Мы могли бы еще уменьшить это число и т. д.

Важным свойством интегральных уравнений с вырожденными ядрами является то, что они легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, и для них легко доказываются теоремы Фредгольма. Действительно, допустим, что интегральное уравнение

$$y(x)=\int\limits_G K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где $K(x,\xi)$ дается формулой (2.8), имеет решение. Тогда должно быть

$$y(x)=\int\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где здесь мы опускаем букву G под знаком интеграла. Если это не вызовет непонимания, то и в дальнейшем знак $\int$ будет всюду означать интеграл, взятый по области G.

Перепишем последнее равенство в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int b_i(\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x) \tag{2.9}$$

и введем константы

$$\int b_i(\xi) y(\xi)\, d\xi = C_i. \tag{2.10}$$

Тогда из уравнения (2.9) получается, что

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) + f(x). \tag{2.11}$$

Видно, что $y(x)$ есть сумма $m+1$ функции x, и чтобы определить постоянные C_i, подставим значение y, даваемое последней формулой, в уравнение (2.10). Получим:

$$\int b_i(\xi) \left[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(\xi) + f(\xi) \right] d\xi = C_i.$$

Введем новые обозначения, что позволит привести развиваемый здесь подход к построениям на предыдущей лекции. А именно, положим

$$\int b_i(\xi) a_j(\xi)\, d\xi = K_{ij}, \qquad \int b_i(\xi) f(\xi)\, d\xi = f_i, \tag{2.12}$$

из последнего уравнения получим:

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j + f_i. \tag{2.13}$$

Итак, всякому решению интегрального уравнения (2.2) соответствует решение $(C_1, \ldots, C_m)$ системы (2.13), причем в силу линейной независимости функций $a_i(x)$ только одно (это следует из предположения о существовании двух разных решений в (2.11)). Обратно, если эта система линейных алгебраических уравнений имеет какое-нибудь решение $(C_1, \ldots, C_m)$, то, подставляя его в правую часть (2.11), мы получим решение заданного интегрального уравнения (2.2), так как каждый шаг, сделанный при переходе от (2.2) к (2.13), обратим. Таким образом, задача свелась к исследованию системы (2.13).

Аналогично, для интегрального уравнения

$$z(x) = \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f^*(x), \tag{2.14}$$

транспонированного к уравнению (2.2), мы сводим задачу к системе линейных уравнений

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.15}$$

транспонированной к системе (2.2).

По условию функции $a_i(x)$ и $b_i(\xi)$ линейно независимы. Поэтому каждым p линейно независимым решениям однородной системы (2.13) или (2.15) отвечают p линейно независимых решений однородного уравнения (2.2) или соответственно уравнения (2.14), и обратно.Т.е. установлено взаимно однозначное соответствие между решениями интегральных уравнений (2.2) и (2.14), с одной стороны, и решениями линейных алгебраических уравнений (2.13) и (2.15), с другой стороны. И, конечно, решениям взаимно транспонированных уравнений (2.2) и (2.14) соответствуют решения взаимно транспонированных уравнений (2.13) и (2.15).

Учитывая, что для алгебраической линейной системы (2.13) справедливы две первые теоремы Фредгольма, отсюда непосредственно вытекают первые две теоремы Фредгольма для интегрального уравнения (2.2). Для доказательства третьей из этих теорем заметим, что если имеется второй случай альтернативы для системы (2.13), то необходимым и достаточным условием существования решения системы (2.13) является условие

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

где $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ – любое решение транспонированной однородной системы. Пользуясь равенствами (2.11), это условие перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(\xi) b_i(\xi)\, d\xi = 0,$$

или:

$$\int f(\xi) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(\xi) \right) d\xi = 0. \tag{2.16}$$

Если $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ есть решение однородной системы (2.15), то $\sum C_i^* b_i(\xi)$ есть решение однородного уравнения (2.14), транспонированного к уравнению (2.2). Поэтому условие (2.16) эквивалентно условию, чтобы

$$\int f(\xi) z(\xi)\, d\xi = 0$$

для всякого решения $z(\xi)$ однородного уравнения (2.14). Отсюда прямо следует третья теорема Фредгольма для уравнения (2.2).

Замечание 2.1. *Мы не накладывали здесь условие вещественности на ядро $K(x, \xi)$ или функцию $f(\xi)$. Они вполне могут быть комплексно значными функциями действительных переменных x и ξ, как и решения $y(x)$ интегрального уравнения (2.2), которые соответственно могут оказаться комплексно значными функциями действительной переменной x. При этом, конечно, сохраняются все доказанные в этом разделе теоремы.*

Замечание 2.2. *Часто оказывается, что $a_i(x)$ и $b_i(\xi)$ являются функциями от некоторого комплексного параметра λ. Обращаясь еще раз к аргументации предыдущей лекции, легко видеть, что первый или второй случай альтернативы Фредгольма для уравнения (2.2) имеет место имеет место в зависимости от того, равен или не равен нулю определитель, составленный из коэффициентов системы (2.13), т.е. определитель*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - K_{11} & -K_{12} & \ldots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1 - K_{22} & \ldots & -K_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -K_{m1} & 1 - K_{m2} & \ldots & 1 - K_{mm} \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

где

$$K_{ij} = \int b_i(\xi, \lambda) a_j(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

Пусть $a_j(\xi, \lambda)$ *и* $b_i(\xi, \lambda)$ *при каждом* x *из* G *суть голоморфные функции от* λ *в некоторой конечной области* Λ *комплексной плоскости. Предположим, что* $a_j(\xi, \lambda)$ *и* $b_i(\xi, \lambda)$ *равномерно непрерывны по совокупности* (ξ, λ). *Тогда* K_{ij} *и определитель (2.17) также суть голоморфные функции от* λ, *что нетрудно показать, представляя интеграл в виде предела интегральной суммы и пользуясь известной теоремой Вейерштрасса о том, что если последовательность голоморфных функций равномерно сходится в некоторой области, то предельная функция будет голоморфной в той же области. Поэтому те значения* λ, *при которых определитель (2.17) равен нулю и имеет место второй случай альтернативы для (2.2), не могут иметь конечных предельных точек внутри* Λ, *если только определитель (2.17) отличен от нуля хотя бы при одном* $\lambda \in \Lambda$.

3. Лекция

3.1. **Интегральные уравнения с вырожденными ядрами (продолжение).**

Замечание 3.1. *Пусть K_{ij} и f_i – голоморфные функции $\lambda \in \Lambda$. Так будет, в частности, если $a_j(\xi, \lambda)$ и $b_i(\xi, \lambda)$ обладают перечисленными в Замечании 2.2 свойствами, а $f(\xi)$ – равномерно непрерывная функция ξ, что мы и будем предполагать для простоты.*

По известным правилам теории определителей коэффициенты C_i находятся из уравнений (2.13) в виде дробей, у которых знаменателем при всех i является один и тот же определитель (2.17), а в числителе стоит определитель D_i, получающийся из определителя (2.17) заменой его i-го столбца столбцом $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Раскрывая D_i по элементам этого последнего столбца, получим:

$$C_i = \frac{\sum_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$

где M_{ij} суть многочлены от K_{ij}. Подставляя только что найденные значения C_i в правую часть (2.11) и пользуясь формулами (2.12) для f_i, найдем:

$$y(x) = \frac{1}{D(\lambda)} \int \sum_{i,j} M_{ij} b_j(\xi, \lambda) a_i(x, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{3.1}$$

Числитель правой части этой формулы при каждом фиксированном x и ее знаменатель суть голоморфные функции λ в области Λ. Поэтому это равенство (3.1) обычно записывают в виде:

$$y(x) = \int \widetilde{R}(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{R}(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,j} M_{ij} b_j(\xi, \lambda) a_i(x, \lambda). \tag{3.3}$$

Удобство этой записи в том, что функция $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ не зависит от $f(x)$. Эта функция, как следует из (3.3) – частное двух голоморфных во всей области Λ функций λ. Функция $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ может не быть голоморфной функцией λ только при тех значениях λ, когда $D(\lambda) = 0$, т.е. при которых для интегрального уравнения (2.2) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. Мы уже показали выше, что такие значения λ не имеют предельных точек внутри Λ, если только $D(\lambda)$ не равно нулю тождественно, что и будем здесь предполагать. Тогда легко показать, что каждое такое значение $\lambda = \lambda_0$, где $D(\lambda_0) = 0$, действительно является особым для $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ в следующем смысле: $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ не является равномерно непрерывной функцией (x, ξ, λ), когда λ находится в произвольно малой окрестности точки λ_0, а x и ξ меняются в G.

Для доказательства этого факта допустим противное. Пусть функция $y(x, \lambda)$, определенная формулой (3.2), будет равномерно непрерывна, если $x \in G$, а λ меняется в некоторой окрестности точки λ_0. Тогда результаты подстановки правой части (3.2) (или (3.1)) в обе части уравнения (2.2) будут при всякой равномерно непрерывной функции $f(\xi)$ равномерно непрерывными функциями при той же области изменения x и λ. Мы знаем, что эти результаты совпадают, когда $\lambda \neq \lambda_0$ и $|\lambda - \lambda_0|$ достаточно мало, что гарантирует, что $D(\lambda) \neq 0$. Отсюда, по непрерывности эти результаты совпадают и при $\lambda = \lambda_0$. Следовательно, при всякой функции $f(x)$ рассматриваемого класса интегральное уравнение (2.2) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$: оно дается формулой (3.2) при $\lambda = \lambda_0$, где $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ определено при $\lambda = \lambda_0$ по непрерывности. Но тогда при этом значении λ для уравнения (2.2) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, а не второй, и потому $D(\lambda_0) \neq 0$.

Эти рассуждения легко переносятся на случай, когда $a_i(\xi, \lambda)$, $b_i(\xi, \lambda)$, $f(\xi)$ имеют разрывы по ξ на некоторых точках, достаточно гладких линиях и поверхностях до $(d-1)$-го измерения включительно, независимых от λ, если при подходе точки ξ к местам разрыва $|a_i(\xi, \lambda)|$, $|b_i(\xi, \lambda)|$, $|f(\xi)|$ растут не очень быстро. Решения будут неопределенными в тех точках x, где $a_i(x, \lambda)$ и $f(x)$ не определены.

Пример 3.1.

$$y(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2\xi + x\xi^2) y(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Отсюда

$$y(x) = -\lambda \left[x^2 \int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi + x \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi \right] + f(x).$$

Полагая

$$\int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi = C_2, \qquad \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi = C_1, \tag{3.4}$$

получим:

$$y(x) = f(x) - C_1 \lambda x - C_2 \lambda x^2. \tag{3.5}$$

Подставляя это выражение y в равенства (3.4), получим

$$\int_0^1 \xi [f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_2, \qquad \int_0^1 \xi^2 [f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_1$$

или

$$b_1 - \frac{C_1\lambda}{3} - \frac{C_2\lambda}{4} = C_2, \qquad b_2 - \frac{C_1\lambda}{4} - \frac{C_2\lambda}{5} = C_1, \tag{3.6}$$

где

$$b_1 = \int_0^1 \xi f(\xi)\, d\xi, \ \text{и}\ b_2 = \int_0^1 \xi^2 f(\xi)\, d\xi.$$

Перепишем уравнения (3.6) в следующем виде:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{\lambda}{3} + C_2 \left(1 + \dfrac{\lambda}{4}\right) = b_1, \\[2ex] C_1 \left(1 + \dfrac{\lambda}{4}\right) + C_2 \dfrac{\lambda}{5} = b_2 \end{cases} . \tag{3.7}$$

Определитель этой системы равен

$$1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240}.$$

Он имеет только два корня

$$\lambda = 60 \pm 16\sqrt{15}.$$

Только при этих двух значениях λ имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В этих случаях все решения однородного интегрального уравнения

$$y(x) + \lambda \int_0^1 (x^2\xi + |x-\xi|^2) y(\xi)\, d\xi = 0$$

даются формулами

$$y(x) = C\left(x \mp \frac{5}{\sqrt{15}} x^2\right),$$

где C – произвольное постоянное. При других же значениях λ наше интегральное уравнение имеет единственное решение, даваемое формулой (3.5), где C_1 и C_2 определяются единственным образом из системы (3.7). Это решение можно представить в виде (3.2), где

$$\widetilde{R}(x,\xi,\lambda) = \lambda \frac{\dfrac{\xi x}{5} - \left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)\xi^2 x - \xi x^2\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right) + \xi^2 x^2 \dfrac{\lambda}{3}}{1 + \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda^2}{240}}.$$

3.2. **Интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами.** Мы рассмотрим теперь класс ядер интегральных уравнений, которые можно назвать достаточно малыми по абсолютной величине и непрерывными. Ниже мы дадим точное определение этого класса. Сейчас же отметим, что для таких уравнений всегда имеет место первый случай альтернативы, т.е. такие уравнения всегда имеют единственное решение. Доказывается это методом последовательных приближений, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются существование и единственность решения одного интегрального уравнения, эквивалентного заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. По существу, это – применение принципа сжатых отображений. Мы не будем применять здесь эту общую теорию, а проведем доказательство для данного конкретного случая. Полученные на этом пути формулы будут применяться в дальнейшем. Введем символические обозначения, которыми мы иногда будем пользоваться ниже. Пусть $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ – равномерно непрерывные функции x и ξ, когда $x \in G$ и $\xi \in G$. Положим

$$(K_2 \circ K_1)(x,\xi) = \int K_2(x,s) K_1(s,\xi)\, ds. \tag{3.8}$$

Назовем ядро $K(x,\xi) = (K_2 \circ K_1)(x,\xi)$ символическим произведением ядра $K_2(x,\xi)$ на $K_1(x,\xi)$. Покажем, что такое символическое умножение ядер аналогично умножению матриц. Для доказательства пусть функция $\varphi_1(x)$ преобразуется с помощью ядра $K_1(x,\xi)$ в функцию $\varphi_2(x) = \int K_1(x,\xi)\varphi_1(\xi)\, d\xi$, а функция $\varphi_2(x)$ преобразуется с помощью ядра $K_2(x,\xi)$ в функцию $\varphi_3(x) = \int K_2(x,\xi)\varphi_2(\xi)\, d\xi$. Комбинируя эти действия, мы получаем, что ядро $K_2 \circ K_1$ задает преобразование функции $\varphi_1(x)$ в $\varphi_3(x)$, т.е. $\varphi_3(x) = \int (K_2 \circ K_1)\varphi_1(\xi)\, d\xi$. Здесь полная аналогия с последовательным применением двух линейных преобразований в n-мерном пространстве. В результате мы получаем линейное преобразование с матрицей, равной произведению матриц этих преобразований.

Учитывая, что оба ядра – равномерно непрерывные функции своих аргументов x и ξ, легко показать, что $K_2 \circ K_1$ есть равномерно непрерывная функция тех же аргументов. Действительно,

$$\left|\int K_2(x_1,s)K_1(s,\xi_1)\,ds - \int K_2(x_2,s)K_1(s,\xi_2)\,ds\right| \leq$$
$$\leq \left|\int K_2(x_1,s)[K_1(s,\xi_1) - K_1(s,\xi_2)]\right| ds +$$
$$+ \left|\int K_1(s,\xi_2)[K_2(x_1,s) - K_2(x_2,s)]\right| ds. \tag{3.9}$$

Пусть верхняя граница абсолютных значений $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, когда $x \in G$ и $\xi \in G$ не превосходит M, и D – объем области G. В силу равномерной непрерывности $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|K_2(x_1,s) - K_2(x_2,s)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

и

$$|K_1(s,\xi_1) - K_1(s,\xi_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

если расстояние между точками x_1 и x_2 и между точками ξ_1 и ξ_2 меньше η. Легко видеть, что при этом условии левая часть неравенства (3.9) будет меньше ε, что и требовалось доказать. Заметим, что, вообще говоря, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Если $K_3(x,\xi)$ – равномерно непрерывная функция x и ξ, то легко проверить, что

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Переходим теперь к доказательству того, что интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами всегда имеют единственное решение. В дальнейшем мы воспользуемся этим для доказательства теорем Фредгольма в случае интегрального уравнения с любым непрерывным ядром. Итак, мы рассматриваем интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi + f(x), \tag{3.10}$$

где λ – некоторый параметр. Мы уже видели на предыдущей лекции, что такая зависимость ядра от комплексного параметра удобна для исследования свойств его решений.

Пусть $K(x,\xi)$ и $f(x)$ – некоторые равномерно непрерывные функции, когда $x \in G$ и $\xi \in G$, где G – некоторая конечная область. Заметим, что вместо того чтобы каждый раз подчеркивать равномерную непрерывность рассматриваемых на открытой области G функций, можно было бы рассматривать эти функции на конечной замкнутой области $\overline{G}$ (т.е. на G вместе с ее границей) и требовать только их непрерывность; тогда отсюда прямо следовала бы и равномерная непрерывность этих функций. Если задана какая-нибудь равномерно непрерывная на открытой области G функция φ, то ее можно продолжить по непрерывности и на границу области G. Тогда получится функция, равномерно непрерывная на замкнутой области $\overline{G}$. Для тех простых областей, которые мы будем рассматривать (ср. замечание к Лекции 1), d-мерный объем границы равен нулю. Тогда интеграл от функции φ по области G совпадает с интегралом по $\overline{G}$ от ее продолжения.

Все дальнейшие рассуждения этого раздела одинаково применимы как в том случае, когда рассматриваемые функции принимают комплексные значения, так и в том случае, если они принимают только действительные значения. Параметр λ тоже может принимать комплексные значения. Но очень существенно, что точки x и ξ действительны, т.е. что все координаты этих точек действительны, иначе возникла бы необходимость определить, что такое интеграл по многим комплексным переменным.

Следуя в точности тому определению ядра, которое было дано прежде, нам следовало бы теперь называть ядром $\lambda K(x,\xi)$. Но, пользуясь обычной терминологией, мы будем функцию $K(x,\xi)$ также называть ядром интегрального уравнения (3.10). Говоря в заголовке настоящего раздела о малости ядра, мы имели в виду малость $K(x,\xi)$.

Мы будем искать решение интегрального уравнения (3.10) в виде бесконечного степенного ряда по λ

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots. \tag{3.11}$$

Подставляя формально этот ряд в (3.10), получим:

$$\begin{aligned} y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \lambda^3 y_3(x) + \ldots = \\ = \lambda \int K(x,\xi)[y_0(\xi) + \lambda y_1(\xi) + \lambda^2 y_2(\xi) + \lambda^3 y_3(\xi) + \ldots]\, d\xi + f(x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_{k+1}(x) &= \int K(x,\xi) y_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3.13}$$

или

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_1(x) &= \int K(x,x_1) f(x_1)\, dx_1, \\ y_2(x) &= \iint K(x,x_1)K(x_1,x_2) f(x_2)\, dx_1 dx_2, \\ &\ldots, \\ y_k(x) &= \overbrace{\int \cdots \int}^{k \text{ раз}} K(x,x_1)K(x_1,x_2)\ldots K(x_{k-1},x_k) f(x_k)\, dx_1 \ldots dx_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$y_k(x) = \int K^{(k)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned} K^{(k)}(x,\xi) &= \overbrace{\int \cdots \int}^{(k-1) \text{ раз}} K(x,x_1)K(x_1,x_2)\ldots K(x_{k-1},\xi)\, dx_1 \ldots dx_{k-1}, \\ &\qquad\qquad \text{при } k = 2, 3, \ldots, \\ K_1(x,\xi) &= K(x,\xi). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Пользуясь символическими обозначениями, мы можем ядро $K^{(k)}(x,\xi)$ представить в виде
$$K^{(k)}(x,\xi) = \underbrace{K \circ K \circ K \circ \ldots \circ K}_{k \text{ раз}}. \tag{3.17}$$
По доказанному в начале этого раздела все ядра $K^{(k)}(x,\xi)$ равномерно непрерывны. Функция $K^{(k)}(x,\xi)$ называется k-м повторением ядра или k-й итерацией ядра $K(x,\xi)$. Все функции $y_k(x)$, как легко видеть, также равномерно непрерывны. Оценим ядра $K^{(k)}(x,\xi)$. В силу равномерной непрерывности ядро $K(x,\xi)$ ограничено. Пусть
$$|K(x,\xi)| < M. \tag{3.18}$$
Подставляя эту оценку в правую часть (3.16), получим:
$$|K^{(k)}(x,\xi)| < M^k D^{k-1}, \tag{3.19}$$
где D означает объем области G. Пользуясь формулой (3.15), мы получим отсюда
$$|y_k(x)| < M^k D^k F,$$
где F есть верхняя грань $|f(x)|$. Поэтому ряд (3.11) сходится абсолютно и равномерно по x в области G, если
$$|\lambda| < \frac{1}{MD}. \tag{3.20}$$

Сумма этого ряда есть непрерывная функция x, поскольку каждое слагаемое непрерывно. В силу равномерной сходимости ряда (3.11) интегрирование в ранее формально написанном равенстве (3.12) можно производить почленно. Поэтому благодаря определению $y_k(x)$ по формулам (3.13) равенство (3.12) действительно имеет место, т.е. функция $y(x)$, определенная рядом (3.11), является решением интегрального уравнения (3.10).

Покажем, что это решение единственное в классе ограниченных функций при условии (3.20). Действительно, допустим, что существуют два таких решения уравнения (3.10), $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Подставляя их в уравнение (3.10) и вычитая почленно полученные тождества, найдем:
$$y_2(x) - y_1(x) = \lambda \int K(x,\xi)[y_2(\xi) - y_1(\xi)]\, d\xi. \tag{3.21}$$
Обозначим через Y верхнюю грань $|y_2(x) - y_1(x)|$, тогда из (3.21), пользуясь неравенством (3.18), найдем:
$$Y \leq |\lambda| MDY.$$
Отсюда на основании (3.20) получим:
$$Y < cY, \text{ где } c < 1.$$
Учитывая, что Y неотрицательно, такое неравенство возможно, только если $Y = 0$, что и требовалось доказать.

Часто бывает удобно представить решение интегрального уравнения (3.10) в следующем виде:
$$y(x) = \lambda \int R(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.22}$$
где
$$R(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K^{(k)}(x,\xi). \tag{3.23}$$

Из оценок (3.19) следует что ряд (3.23) сходится равномерно по (x, ξ, λ), если $x \in G$, $\xi \in G$ и $|\lambda| < \frac{1}{MD} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда функция $R(x, \xi, \lambda)$ есть равномерно непрерывная функция по совокупности (x, ξ) и голоморфная функция от λ в круге (3.20), если $x \in G$ и $\xi \in G$. Поэтому интеграл (3.22) существует. Что он действительно дает решение интегрального уравнения (3.10) представленное рядом (3.11), легко увидеть, если подставить вместо $R(x, \xi, \lambda)$ ряд (3.23) в правую часть (3.22) и интегрирование по ξ выполнить почленно. Функция $R(x, \xi, \lambda)$ называется **резольвентой** интегрального уравнения (3.10)

Замечание 3.2. *Сравним (3.22) с (3.20). Покажем, что для интегральных уравнений (3.10) с вырожденными ядрами, для которых $a_i(x)$ и $b_i(x)$ равномерно непрерывны и достаточно малы по абсолютной величине, т.е. для тех интегральных уравнений, которые принадлежат одновременно к типам, рассмотренным в Лекциях 3 и данной, будет*

$$\widetilde{R}(x, \xi, \lambda) = \lambda R(x, \xi, \lambda).$$

Так как при этом имеет место первый случай альтернативы, то $D(\lambda) \neq 0$.

Допустим, что в некоторой точке (x_0, ξ_0, λ_0)

$$\widetilde{R}(x_0, \xi_0, \lambda_0) \neq \lambda_0 R(x_0, \xi_0, \lambda_0), \qquad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Так как для уравнений с рассматриваемыми ядрами $\widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0)$ и $R(x_0, \xi, \lambda_0)$ непрерывны по ξ, то всегда можно найти такую окрестность G_0 точки ξ_0, в которой всюду

$$\widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0) \neq \lambda_0 R(x_0, \xi, \lambda_0).$$

С другой стороны, в силу единственности решения интегральных уравнений рассматриваемого типа при любой равномерно непрерывной функции $f(x)$ должно иметь место следующее равенство:

$$\int \widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0) f(\xi)\, d\xi = \lambda_0 \int R(x_0, \xi, \lambda_0) f(\xi)\, d\xi.$$

В частности, это равенство должно выполняться при функции $f(\xi)$, равной нулю всюду вне окрестности G_0 точки ξ_0 и положительной внутри этой окрестности, что невозможно.

Как видно из предыдущего, резольвента $R(x, \xi, \lambda)$ определяется ядром интегрального уравнения и не зависит от $f(x)$. Так как функция $y(x)$, даваемая формулой (3.22), представляет единственное решение уравнения (3.10), то отсюда следует, что уравнения (3.10) и (3.22) эквивалентны. Поэтому, если в уравнении (3.22) считать $y(x)$ известной функцией, а $f(x)$ неизвестной функцией, то единственное решение $f(x)$ этого уравнения дается формулой (3.10). Функция $K(x, \xi)$ в этой формуле играет роль резольвенты для уравнения (3.22) с ядром $R(x, \xi, \lambda)$.

Применяя к уравнению

$$z(x) = \lambda \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.24}$$

транспонированному к уравнению (3.10), те же рассуждения, какие мы только что провели для уравнения (3.10), мы найдем, что в круге (3.20) оно имеет единственное в классе ограниченных функций решение, которое дается рядом

$$z(x) = z_0(x) + \lambda z_1(x) + \lambda^2 z_2(x) + \lambda^3 z_3(x) + \ldots .$$

Здесь

$$z_0(x) = f(x),$$
$$z_k(x) = \int K(\xi, x) z_{k-1}(\xi)\, d\xi,$$

или, обозначая через $K^*(x,\xi)$ ядро $K(\xi,x)$, получим:

$$z_1(x) = \int K^*(x, x_1) f(x_1)\, dx_1,$$

$$z_k(x) = \overbrace{\int \cdots \int}^{k \text{ раз}} K^*(x, x_1) K^*(x_1, x_2) \ldots K^*(x_{k-1}, x_k) f(x_k)\, dx_1 \ldots dx_k,$$

или

$$z_k(x) = \int K^{*(k)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

где

$$K^{*(k)}(x, \xi) = \overbrace{\int \cdots \int}^{(k-1) \text{ раз}} K^*(x, x_1) K^*(x_1, x_2) \ldots K^*(x_{k-1}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{k-1},$$

Легко видеть, выписывая соответствующие интегралы, что $K^{*(k)}(x,\xi) = K^{(k)}(\xi,x)$. Отсюда следует, что решение уравнения (3.24) можно представить в виде

$$z(x) = \lambda \int R^*(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.25}$$

где

$$R^*(x, \xi, \lambda) = R(\xi, x, \lambda).$$

Таким образом, мы видим, что в круге (3.20) как уравнение (3.10), так и транспонированное к нему уравнение (3.24) при всякой равномерно непрерывной функции $f(x)$ и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение, т.е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма. Отметим следующие две формулы:

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int K(x, x_1) R(x_1, \xi, \lambda)\, dx_1, \tag{3.26}$$

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int R(x, x_1, \lambda) K(x_1, \xi)\, dx_1, \tag{3.27}$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо R ряд (3.23), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (3.17).

4. Лекция

4.1. **Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным.** Пусть дано интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{4.1}$$

где $f(x)$ – равномерно непрерывная функция, а

$$K(x,\xi) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(\xi) + \lambda K_1(x,\xi) = A(x,\xi) + K_1(x,\xi).$$

Здесь $a_i(x)$, $b_i(\xi)$, $K_1(x,\xi)$ – равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме. хавенство

$$\psi(x) = \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi$$

условимся записывать символически в виде

$$\psi = Ky$$

Таким образом, через K мы будем обозначать оператор, который функцию $y(x)$ переводит в функцию $\psi(x) = \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi$. Этот оператор определяется ядром $K(x,\xi)$. Через K^* будем обозначать оператор, который определяется транспонированным ядром $K^*(x,\xi) = K(\xi,x)$. Символом E будем обозначать оператор, который функцию $y(x)$ переводит в ту же самую функцию, т.е. $Ey = y$ при всякой функции $y(x)$. Оператор $K_1 \pm K_2$ определяем равенством

$$(K_1 \pm K_2) y = K_1 y \pm K_2 y$$

при любой функции $y(x)$. Оператор $K_1 K_2$ определяем при помощи следующего равенства:

$$K_1 K_2 y = K_1(K_2 y)$$

для любой функции $y(x)$.

Легко видеть, что если K_1 и K_2 – операторы вида (4.1) с ядрами $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, то оператор $K_1 \pm K_2$ определяется ядром $K_1(x,\xi) \pm K_2(x,\xi)$, а оператор $K_1 K_2$ определяется ядром $K_1 \circ K_2$. Таким образом, уравнение (4.1) можно записать в виде

$$(E - \lambda K) y = f.$$

Прежде чем переходить к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (4.1), сформулируем следующие леммы:

Лемма 4.1. *Если $A(x,\xi)$ – вырожденное ядро и $K(x,\xi)$ – произвольное непрерывное ядро, то $A \circ K$ и $K \circ A$ также суть вырожденные ядра.*

Лемма 4.2. *Ядро, транспонированное к $K_1 \circ K_2$, равно $K_2^* \circ K_1^*$.*

В справедливости этих утверждений легко убедиться, рассматривая соответствующие интегралы. Докажем теперь, что для уравнения (4.1) при $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, где M_1 есть верхняя грань значений $|K_1(x,\xi)|$, а D – объем области G, справедливы три теоремы Фредгольма.

1. Первая теорема Фредгольма. Покажем, что если однородное уравнение (4.1) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (4.1) имеет решение при всякой функции $f(x)$. Заменив K на $A + K_1$ перепишем уравнение (4.1) в виде

$$(E - \lambda A - \lambda K_1)y = f,$$

где A и K_1 – операторы, соответствующие ядрам $A(x,\xi)$ и $K_1(x,\xi)$. Тогда

$$(E - \lambda K_1)y = \lambda A y + f. \tag{4.2}$$

Положим

$$(E - \lambda K_1)y = \eta. \tag{4.3}$$

Так как $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, то из доказанной на предыдущей лекции формулы (3.22) следует, что

$$y = \eta + \lambda R\eta = (E + \lambda R)\eta, \tag{4.4}$$

где R – оператор, соответствующий резольвенте $R(x,\xi,\lambda)$ ядра $K_1(x,\xi)$. Подставляя это выражение $y(x)$ в уравнение (4.2), получим:

$$\eta = \lambda A(E + \lambda R)\eta + f,$$

или

$$[E - \lambda A(E + \lambda R)]\eta = f. \tag{4.5}$$

Ядро $A(x,\xi) + A \circ \lambda R$ этого интегрального уравнения вырожденное, как это следует из леммы 4.1. Таким образом, мы показали, что каждому решению $y(x)$ уравнения (4.1) соответствует по формуле (4.3) решение $\eta(x)$ уравнения (4.5) с вырожденным ядром.

Обратно, легко проверить, что каждому решению $\eta(x)$ уравнения (4.5) соответствует решение $y(x)$ уравнения (4.1), определенное по формуле (4.4). Далее, если однородное уравнение (4.5) имеет нетривиальное решение, то однородное уравнение (4.1) также имеет нетривиальное решение, которое определяется формулой (4.4).

Так как, по предположению, однородное уравнение (4.1) имеет только тривиальное решение, то, следовательно, однородное уравнение (4.5) также имеет только тривиальное решение. Для уравнения (4.5) с вырожденным ядром мы доказали в Лекции 3 первую теорему Фредгольма. Поэтому неоднородное уравнение (4.5) имеет решение $\eta(x)$ при всякой функции $f(x)$. По формуле (4.4) мы получим решение $y(x)$ уравнения (4.1) при любой функции $f(x)$. Это решение, очевидно, единственное. Тем самым первая теорема Фредгольма доказана, так как если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное уравнение либо не имеет решения, либо это решение не единственное.

2. Вторая теорема Фредгольма. Покажем, что уравнение $(E - \lambda A - \lambda K_1)y = 0$ и транспонированное к нему уравнение

$$(E - \lambda A^* - \lambda K_1^*)\eta = 0 \tag{4.6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, если $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$.

Заметим, что однородные уравнения (4.1) и (4.5) имеют одинаковое число линейно независимых решений, так как каждым p линейно независимым решениям одного уравнения соответствует по формуле (4.3) или (4.4) p линейно независимых решений другого уравнения. Однородное уравнение, транспонированное к уравнению (4.5), имеет в силу леммы 4.2 вид

$$[E - \lambda(E + \lambda R^*)A^*]\zeta = 0. \tag{4.7}$$

Так как уравнение (4.5) имеет вырожденное ядро, то по второй теореме Фредгольма, доказанной в Лекции 3 для уравнений с вырожденными ядрами, однородные уравнения (4.5) и (4.7) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Покажем теперь, что уравнения (4.7) и (4.6) эквивалентны. Пусть некоторая функция $\zeta(x)$ есть решение уравнения (4.7). Покажем, что она удовлетворяет также уравнению (4.6). Применяя к правой и левой частям равенства (4.7) оператор $E\lambda K_1^*$, мы получим:

$$(E - \lambda K_1^*)[E - \lambda(E + \lambda R^*)A^*]\zeta = [E - \lambda K_1^* - \lambda(E - \lambda K_1^*)(E + \lambda R^*)A^*]\zeta. \tag{4.8}$$

Так как из формул (3.24) и (3.25) следует, что

$$(E - \lambda K_1^*)(E + \lambda R^*)\varphi = \varphi$$

при любой функции $\varphi(x)$, то из равенства (4.8) получаем:

$$(E - \lambda K_1^* - \lambda A^*)\zeta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, применяя оператор $E + \lambda R^*$ к правой и левой частям равенства (4.6) и пользуясь равенством $(E + \lambda R^*)(E - \lambda K_1^*) = E$, получим, что всякое решение уравнения (4.6) удовлетворяет уравнению (4.7). Итак, мы доказали, что однородные уравнения (4.1), (4.5), (4.7) и (4.6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Те значения λ, при которых для уравнения (4.1) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, называются собственными значениями уравнения (4.1) (или ядра $K(x,\xi)$; ср. Лекцию 2), а соответствующие нетривиальные решения однородного уравнения – собственными функциями, отвечающими этому собственному значению.

Так как в круге $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$ функция $R(\xi, x, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, то определитель (2.17), соответствующий вырожденному уравнению (4.5), также есть голоморфная функция от λ в этом круге. При $\lambda = 0$ этот определитель обращается в 1. Следовательно, он не равен 0 тождественно. Поэтому его корни не могут иметь точек накопления в этом круге. Следовательно, собственные значения λ уравнения (4.1) не могут иметь предельных точек в круге $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$.

3. Третья теорема Фредгольма. Покажем, что решение уравнения (4.1) существует тогда и только тогда, когда

$$\int f(x)z(x)\,dx = 0,$$

где $z(x)$ – любое решение однородного транспонированного к (4.1) уравнения (4.6). При доказательстве первой теоремы Фредгольма для уравнения (4.1) мы установили, что уравнение (4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда существует решение уравнения (4.5) с вырожденным ядром. В Лекции 3 мы показали, что уравнение (4.5) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int f(x)\zeta(x)\,dx = 0,$$

где $\zeta(x)$ – любое решение уравнения (4.7). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(x)$ совпадает с совокупностью решений $z(x)$ уравнения (4.6). Этим теорема доказана.

4.2. **Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами.** При рассмотрении интегральных уравнений с таким ядрами удобно пользоваться теоремой Вейерштрасса: пусть f – непрерывная функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен p с вещественными коэффициентами, что для всех x из $[a, b]$ одновременно выполнено условие $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$. В силу этой теоремы всякое равномерно непрерывное ядро $K(x, \xi)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(x, \xi)$ – какая-нибудь равномерно непрерывная функция (x, ξ), заданная на конечной области G. По указанной теореме, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $K_0(x, \xi)$ достаточно высокой степени относительно координат точек x и ξ, что всюду на G

$$|K(x, \xi) - K_0(x, \xi)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(x, \xi)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки x, а другой – только от координат точки ξ, т.е. $K_0(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(\xi)$. Поэтому мы имеем

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(\xi) + K_1(x, \xi),$$

причем

$$|K_1(x, \xi)| < \varepsilon.$$

Теперь воспользуемся теоремой, доказанной выше: в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D – объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Но ε можно взять как угодно малым. Отсюда следует справедливость этих теорем на сколь угодно больших кругах с центром в точке $\lambda = 0$, т.е. справедливость их на всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (Лекция 3) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. Затем эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем разделе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными.

4.3. **Интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{L(x,\xi)}{\rho^\alpha(x-\xi)}$. 1.** Мы рассмотрим точки $x=(x_1,\ldots,x_d)$ и $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ принадлежащими некоторой конечной замкнутой d-мерной области $\overline{G}$. Пусть

$$\rho(x)=\sqrt{\sum_{m=1}^{d}x_m^2}$$

означает расстояние от нуля до точки x. Предположим, что $L(x,\xi)$ – некоторая непрерывная по точкам (x,ξ) (т.е. по совокупности точек x и ξ) функция. Докажем сначала, что для интегральных уравнений с ядрами такого вида при $\alpha<d$ на всей плоскости λ справедливы все три теоремы Фредгольма и что тогда собственные значения λ не могут иметь конечных предельных точек.

Предварительно докажем следующую лемму для ядер $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, непрерывных по (x,ξ), если $x\neq\xi$, $x\in\overline{G}$ и $\xi\in\overline{G}$.

Лемма 4.3. *Если*

$$|K_1(x,\xi)|<\frac{A_1}{\rho^{\alpha_1}(x-\xi)},\quad 0\le\alpha_1<d, \tag{4.9}$$

и

$$|K_2(x,\xi)|<\frac{A_2}{\rho^{\alpha_2}(x-\xi)},\quad 0\le\alpha_2<d, \tag{4.10}$$

то интеграл

$$K_3(x,\xi)=\int K_1(x,x_1)K_2(x_1,\xi)\,dx_1$$

всегда существует и непрерывен по (x,ξ), если x отлично от ξ; далее,

$$|K_3(x,\xi)|<\frac{A_3}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x-\xi)},\qquad \text{если } \alpha_1+\alpha_2>d, \tag{4.11}$$

и

$$|K_3(x,\xi)|<A_3\log\rho(x-\xi)+A_4,\qquad \text{если } \alpha_1+\alpha_2=d, \tag{4.12}$$

где A_3 и A_4 – некоторые постоянные. Если же $\alpha_1+\alpha_2<d$, то этот интеграл существует всегда и есть равномерно непрерывная функция от (x,ξ).

Доказательство. Пусть $x\neq\xi$. Тогда

$$|K_3(x,\xi)|\le\int|K_1(x,x_1)|\cdot|K_2(x_1,\xi)|\,dx_1<$$

$$<\overbrace{\int\cdots\int}^{d}_{r_1\le D}\frac{A_1A_2dx_1^{(1)}\ldots dx_d^{(1)}}{\left[\sum_{i=1}^{d}(x_i-x_i^{(1)})^2\right]^{\alpha_1/2}\left[\sum_{i=1}^{d}(x_i^{(1)}-y_i)^2\right]^{\alpha_2/2}}=I. \tag{4.13}$$

Здесь x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i=1,\ldots,d$, – соответственно координаты точек x, x_1, ξ; D – диаметр области $\overline{G}$, т.е. верхняя грань расстояний между двумя ее точками. Мы обозначили $r_1=\sqrt{\sum(x_i^{(1)}-x_i)^2}$.

Для простоты вычислений, не ограничивая общности, положим

$$x_1=\ldots=x_d=0;\qquad y_1=\rho,\quad y_2=\cdots=y_d=0,$$

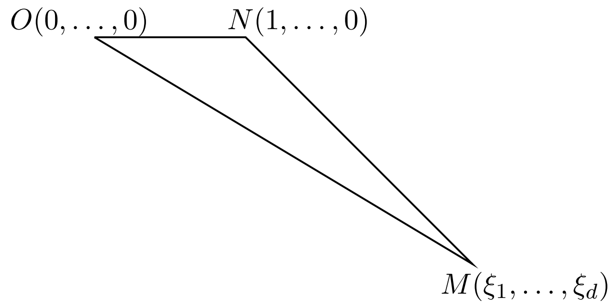

Рис. 2

где $\rho=\rho(x-\xi)$. Положим далее

$$x_i^{(1)}=\rho\xi_i.$$

Тогда интеграл I, стоящий в правой части (4.13), можно переписать так:

$$I=\overbrace{\int\cdots\int}^{d}_{r_1\le D}\frac{A_1A_2\rho^d d\xi_1\dots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^d\xi_i^2\right]^{\alpha_1/2}\left[(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^d\xi_i^2\right]^{\alpha_2/2}\rho^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Заметим, что если $\sqrt{\sum_{i=1}^d\xi_i^2}\ge 2$, то

$$\sqrt{(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^d\xi_i^2}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^d\xi_i^2}. \tag{4.14}$$

Действительно, из рис. 2 видно, что $NM+ON\ge OM$. Но $ON=1$. Следовательно, $NM\ge OM-1=\dfrac{1}{2}(OM+(OM-2))$. Но по условию $OM\ge 2$.

Поэтому $NM\ge OM/2$.