Избранные главы дискретной математики.

Задачи с первых двух занятий.

1) Перечислите (с точностью до изоморфизма) все кольца, состоящие из 2, 3, 4 и 5 элементов. (На самом деле, первое число с трудным ответом это 8.) К 08.02.

2) Докажите, что идемпотентный линейный оператор A (т.е. такой, что $A^2 = A$) в векторном пространстве V над любым полем является проектированием на подпространство, т.е. существует разложение этого пространства в прямую сумму $V = U \oplus W$, такое что $A(u, w) = (u, 0)$ ($u \in U$, $w \in W$). К 08.02.

3) Пусть $p > 2$ простое число, $k > 1$ натуральное число. Докажите, что группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ циклическая, т.е. в ней существует элемент порядка $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. (Считать утверждение для $k = 1$ известным — мы его подробно обсудим позже.) К 15.02.

4) Докажите, что в группе обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ есть элемент порядка 2^{k-2} и нет элемента порядка $2^{k-1} = \varphi(2^k)$. К 15.02.