Семинар 4

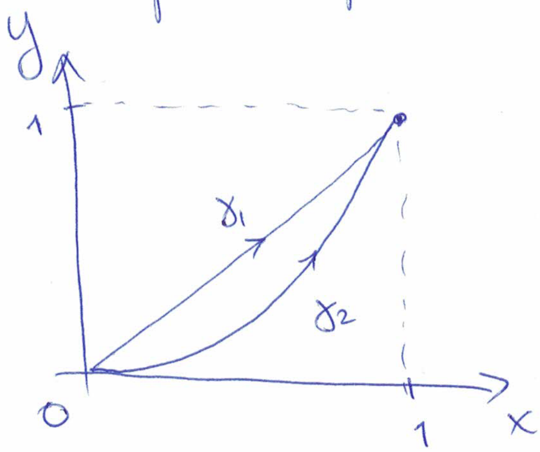
Работа и потенциальные силы. Первые примеры.

Пример 1 Сила $\vec{F}$ с координатами

$$F_x = 1 + y\,,\quad F_y = \alpha x + 2y$$

($\alpha = \text{const}$ – параметр)

действует в $\mathbb{R}^2$. Вычислите работу силы на траекториях



γ_1: (vt, vt), $t \in [0, 1/v]$

v – скорость движения частицы, постоянный параметр

γ_2: (t, t^2), $t \in [0,1]$

Обе траектории имеют концы $(0,0)$ и $(1,1)$ (см. Рис.)

Решение:

Для γ_1 $d\vec{r} = (v\,dt, v\,dt)$, поэтому

$$A_{\gamma_1} = \int_0^{1/v} \left\{ (1+vt)\,v\,dt + (\alpha\cdot vt + 2\cdot vt)\,v\,dt \right\} =$$

$$\underset{\text{замена } s=vt}{=} \int_0^1 ds\,\big(1 + (\alpha+3)s\big) = \left(s + (\alpha+3)\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\alpha+5}{2}$$

Для γ_2: $d\vec{r} = (dt, 2t\,dt)$, поэтому

$$A_{\gamma_2} = \int_0^1 \{(1+t^2)\,dt + (\alpha t + 2t^2)2t\,dt\} =$$

$$= \left(t + (1+2\alpha)\frac{t^3}{3} + 4\cdot\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{7+2\alpha}{3}$$

Замечаем, что $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$ только если $\alpha = 1$. В этом случае выполнено условие $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, то есть сила $\vec{F}$ потенциальна

Как найти отвечающий ей потенциал $U(x,y)$?

Общий метод: решить систему дифуров:

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y) = -F_x = -(1+y) \\ \partial_y U(x,y) = -F_y = -(x+2y) \end{cases} \quad /\text{помним, } \alpha = 1/$$

Сначала интегрируем 1-е уравнение по x при постоянном y (∂_x – производная по x при $y = \text{const}$):

$$U(x,y) = -\int dx\,(1+y)\Big|_{y=\text{const}} = -x(1+y) + C(y)$$

это константа интегрирования по x, но она может быть разной при разных значениях параметра y.

Подставляем полученное выражение для $U(x,y)$ во второе уравнение системы:

$$-x + C'(y) = -(x+2y)$$

и получаем уравнение на $C(y)$:

$$C'(y) = -2y \Rightarrow C(y) = \int(-2y)dy = -y^2 + C$$

уже просто константа.

В итоге: $\boxed{U(x,y) = -x - xy - y^2 + C}$

Поскольку нас интересует не сама $U(x,y)$, а $dU = -(\vec{F}, d\vec{r})$, то константу C можно не выписывать.

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы.

Ответ в этой задаче можно было увидеть сразу методом "пристального взгляда":

Запишем dU:

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(1+y)dx - (x+2y)dy =$$

$$= \underbrace{-dx - 2ydy - (ydx + xdy)}_{} = -dx - d(y^2) - d(xy)$$

группируем полные дифференциалы

$$= -d(x + xy + y^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = -x - xy + y^2}$$

Вернёмся к обсуждению работы силы $\vec{F}$ при произвольном α.

Замечаем, что A_{γ_1} не зависит от значения параметра v, т.е. от скорости движения точки по траектории γ_1.

<u>Вопрос</u>: Почему это так для нашей $\vec{F}$? Для каких сил $\vec{F}$ работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории?

<u>Ответ</u>: Наша сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ не зависит явно от $\dot{\vec{r}}$ и t. В случае, когда сила зависит явно от скорости движения точки и/или от времени, её работа может зависеть от скорости движения вдоль траектории. <u>Обоснуйте</u>.

$\boxed{\text{Пример 2}}$ Путник пересекает поле из точки $A=(0,0)$ в точку $B=(1,1)$ по траектории

$$\gamma: \quad \vec{r}(t) = v(t,t), \; t = [0, 1/v],$$
$$v = \text{const} > 0$$

В это время в поле дует ветер. Скорость ветра $\vec{V} = (1,0)$.

Сила сопротивления ветра прямо пропорциональна скорости воздуха относительно путника (вязкое трение):

$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{V} - \dot{\vec{r}}(t)$$

Вычислите работу, производимую ветром над путникам.

<u>Решение</u>: Сила ветра, действующая на путника $\vec{F} = k\vec{v}_{отк.} = k(\vec{V} - \dot{\vec{r}}) = k(1-v, -v)$
$(k = const > 0)$

Учитывая, что
$$d\vec{r} = (v, v)dt$$

вычисляем интеграл работы
$$A_{ветра} = \int_0^{1/v} (\vec{F}, \dot{\vec{r}})dt = k\int_0^{1/v} \{(1-v)v - v \cdot v\}dt =$$

$$= k\int_0^1 \{(1-v) - v\}ds = k(1-2v)$$

(замена $s = vt$)

Видно, что работа силы зависит от скорости путника v. Это потому, что сила ветра от неё зависела.

Замечаем, что работа ветра может быть как положительной (подгоняет при $v < 1/2$), так и отрицательной (мешает при $v > 1/2$)

Зависимость работы от скорости движения вдоль траектории гарантирует, что она не потенциальна. <u>Силы трения всегда не потенциальны</u>. Их работа вдоль замкнутой траектории $\neq 0$, поскольку они направлены <u>против</u> $d\vec{r} \Rightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) < 0$

Пример 3

На материальную точку в $\mathbb{R}^3$ действует сила, декартовы координаты которой имеют вид:

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1$$

а) Определите, является ли она потенциальной.

б) Если да, то постройте ее потенциал.

Решение: а) Проверяем все 3 условия:

$\partial_x F_y = \partial_y F_x$: $1 = 1$ – выполнено

$\partial_x F_z = \partial_z F_x$: $0 = 0$ – выполнено

$\partial_y F_z = \partial_z F_y$: $2z = 2z$ – выполнена.

Эта сила потенциальна в любой односвязной области $\mathbb{R}^3$.

б) Строим $U(x,y,z)$ общим методом

* Интегрируем уравнение $F_x = 2x + y = -\partial_x U(x,y,z)$ по x при $y = const$ и $z = const$:

$$U(x,y,z) = -\int (2x+y)\,dx = -x^2 - xy + C(y,z)$$

** Подставляем результат в уравнение $F_y = x + z^2 = -\partial_y U$ и интегрируем по y при $x = const$ и $z = const$:

$$C(y,z) = \int \{\cancel{x} - (\cancel{x} + z^2)\}\,dy = -z^2 y + C(z)$$

*** Подставляем результат в уравнение

$$F_z = 2yz + 1 = -\partial_z U$$ и интегрируем по z

при $x = const$, $y = const$:

$$C(z) = \int \{ 2\cancel{z}y - (2yz+1) \} dz = -z + C$$

Ответ: $U(x, y, z) = -x^2 - xy - z^2 y - z + C$

Метод "пристального взгляда" :

$$dU = -(\vec{F}, d\vec{r}) = -(2x+y)dx - (x+z^2)dy - (2yz+1)dz$$

$$= \underbrace{-2x dx - (y dx + x dy) - (z^2 dy + 2z dz \cdot y)}_{\text{сгруппировали полные дифференциалы}} - dz =$$

$$= -d(x^2 + xy + yz^2 + z)$$

$$\Downarrow$$

$$U = -x^2 - xy - yz^2 - z,$$