Семинар 4.

Везде в задачах предполагается, что основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику $\neq 2$, а $Q \subset \mathbb{P}^3$ - невырожденная квадрика по Штейнеру в $\mathbb{P}^3$.

Задача 1. Пусть a - произвольная точка в $\mathbb{P}^3$, не лежащая на Q. Проведем произвольную плоскость τ через точку a, и рассмотрим конику $D = Q \cap \tau$. Обозначим через $p_a Q$ и $p_a D$ поляру точки a относительно квадрики X и коники D, соответственно.
1) Рассмотрим пару точек $\{b_1, b_2\} = D \cap p_a Q$. Докажите, что прямая $(b_1 b_2)$ совпадает с прямой $p_a Q \cap \tau$.
2) Докажите, что $p_a Q \cap \tau = p_a D$.
3) Докажите, что для произвольной точки $a \in Q$ верно равенство $p_a Q = \mathbb{T}_a Q$.

Задача 2. Докажите, что для произвольной точки $x \in \mathbb{P}^3$ условие $x \in p_a X$ равносильно условию $a \in p_x X$.

Задача 3. 1) В обозначениях задачи 1 рассмотрим конику $C = p_a Q \cap Q$. Докажите, что для любой точки $b \in Q$ прямая (ab) лежит в плоскости $\mathbb{T}_b Q$.
2) Докажите, что $a = \bigcap\limits_{b \in C} \mathbb{T}_b Q$.
3) Пусть плоскость π пересекает квадрику Q по конике C. Докажите, что $\bigcap\limits_{b \in C} \mathbb{T}_b Q$ - точка. Обозначим эту точку через a. Проверьте, что $p_a Q = \pi$.

Задача 4. На семинаре 4 мы рассмотрели поляритет относительно квадрики Q как проективное отображение

$$p: \ \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{3\vee}, \quad x \mapsto p_x Q,$$

и построили отображение в себя множества прямых в $\mathbb{P}^3$, сопоставляющее прямой l прямую $p_l Q$, называемую *полярой прямой l относительно квадрики Q*, где

$$p_l Q = \bigcap_{a \in l} \mathbb{T}_a Q$$

Пользуясь двумя сериями образующих прямых на квадрике Q, найдите геометрическую конструкцию прямой $p_l Q$ в следующих возможных случаях:
1) $l \cap Q = \{x, y\}$ = две различные точки;
2) $l \cap Q$ - единственная точка;
3) l лежит на Q.