Механика 2022

Домашнее задание № 3

Срок сдачи задания **21 февраля 2022**

---

1. Компоненты силы $\vec{F}$ в сферических координатах r, θ и ϕ пространства $\mathbb{R}^3$ заданы соотношениями:

$$F_r = -2r\cos\phi\sin 2\theta, \quad F_\theta = -2r\cos\phi(1+\alpha\sin^2\theta), \quad F_\phi = -\alpha r\cos\theta\sin\phi,$$

где α — вещественный параметр.

Определите, при каких значениях α сила потенциальна, и найдите соответствующую функцию потенциальной энергии.

2. Компоненты силы $\vec{F}$ в цилиндрических координатах ρ, ϕ и z пространства $\mathbb{R}^3$ заданы соотношениями:

$$F_\rho = \rho X(z)\cos\phi, \quad F_\phi = \rho Y(\phi)e^{-z^2}, \quad F_z = V(\rho,\phi)\,z\,e^{-z^2},$$

где X, Y и V — произвольные гладкие функции. При каких X, Y и V выполнены необходимые условия потенциальности $\vec{F}$ (найдите общее решение)? Определите вид потенциальной силы $\vec{F}$, если дополнительно заданы граничные условия:

$$\vec{F}\big|_{\rho=0} = 0 \quad (\text{на оси } Oz), \qquad F_\rho\big|_{\phi=z=0} = \rho \quad (\text{на оси } Ox).$$

Постройте соответсвующую функцию потенциальной энергии и проверьте достаточные условия потенциальности.

3. В цилиндрических координатах пространства $\mathbb{R}^3$ компонента F_ϕ *потенциальной* силы $\vec{F}$ имеет вид:

$$F_\phi = f(\rho,z)\cos\phi,$$

где $f(\rho,z)$ — гладкая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент силы $\vec{F}$ и вычислите соответствующий потенциал.

4*. Тангенциальное силовое поле в сферических координатах простанства $\mathbb{R}^3$ записывается в виде:

$$\vec{F} = F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_\phi\,\vec{e}_\phi,$$

то есть в любой точке пространства с радиус-вектором $\vec{r}$ вектор $\vec{F}$ ортогонален $\vec{r}$.

а) Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид тангенциальной потенциальной силы.

б) Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое в точках экватора сферы радиуса r (т.е. при $\theta = \pi/2$) имеет ненулевую компоненту $F_\phi(r)$, не зависящую от угла ϕ?

5. Массивная частица движется без трения по поверхности кругового конуса

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

не покидая ее в процессе движения. К частице прикреплена невесомая пружина с коэффициентом упругости κ, второй конец которой свободно скользит по оси Oz и пружина все время остается перпендикулярной оси Oz при любых движениях частицы. Потенциальная энергия упругой деформации пружины дается формулой:

$$U = \frac{\kappa\,\ell^2}{2},$$

где ℓ — длина пружины. Силой тяжести можно пренебречь.

а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой механической системы.

б) Выпишите уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа) частицы.

в) Есть ли в системе сохраняющиеся величины (интегралы движения)? Если есть, приведите их явный вид в выбранных обобщенных координатах.