

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2022
ЛИСТОК 5, СЕМИНАР 8

1. Найдите конформное отображение полукруга $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость.

2. Найдите конформное отображение полуполосы $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1$ на верхнюю полуплоскость.

3. Найдите конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным отрезком от 0 до i на верхнюю полуплоскость.

4. Найдите конформное отображение внешности эллипса с полуосями a, b ($a > b$) на внешность единичного круга.

5. Найдите конформное отображение области D , являющейся верхней полуплоскостью $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге окружности $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha$, где $0 < \alpha < \pi$, на верхнюю полуплоскость.

6. Найдите конформное отображение области D , являющейся полуполосой $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по отрезку $[\frac{1}{2}\pi i, 1 + \frac{1}{2}\pi i]$, на верхнюю полуплоскость.

7. Пусть Γ – гладкая кривая $\Gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$ в верхней полуплоскости \mathbb{H} , начинающаяся в точке $\Gamma(0) \in \mathbb{R}$ вещественной оси, и пусть Γ_t – часть кривой $\Gamma_t := \Gamma([0, t])$. Через $g(z, t)$ обозначим функцию, осуществляющую конформное отображение области $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$ на \mathbb{H} , нормированную условием $g(z, t) = z + u(t)z^{-1} + O(z^{-2}), z \rightarrow \infty, t > 0$. Докажите, что существует непрерывная вещественнозначная функция $\xi(t)$, такая, что функция $g(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{g(z, t) - \xi(t)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad g(z, 0) = z.$$

Это уравнение называется (хордовым) уравнением Левнера и играет важную роль в теории конформных отображений.