

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2022  
ЛИСТОК 4, СЕМИНАР 7

1. Вычислите интеграл  $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$  по контуру  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ ,  $r > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. Вычислите интеграл  $\int_{\gamma} z^n dz$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , а  $\gamma$  – некоторый путь из  $a$  в  $b$ . (Убедитесь, что при  $n \neq -1$  интеграл не зависит от выбора пути, а при  $n = -1$  зависит, и опишите как.)

3. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$  по единичной окружности.

4. Вычислите интеграл  $\oint_{\gamma} \frac{2z^2 + 5z + 8}{z(z+1)^2} dz$ , где контур  $\gamma$  – окружность  $|z| = 3$ .

5. Найдите все возможные значения интеграла  $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$  при различных выборах контура  $C$  ( $C$  – замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек  $0, 1, -1$ ).

6. Покажите, что если путь  $\gamma$ , соединяющий точки  $0$  и  $1$ , не проходит через точки  $\pm i$ , то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где  $k$  – целое число.

7. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1}) dz$ .

8. Приведите пример рациональной функции  $f$  и замкнутого контура  $\gamma$  таких, что  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 1$  и  $\oint_{\gamma} zf(z) dz = -1$ .

9. Вычислите интеграл  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , где  $\gamma$  – окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$ , проходимая против часовой стрелки.

10. Вычислите интеграл  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$ , где  $\gamma$  – окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $a$  ( $|a| \neq R$ ).

11. Пусть  $P(z)$  – многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\bar{z} = -R^2 P'(a).$$

**12.** Пусть  $\gamma$  – гладкий замкнутый контур, а функция  $f$  голоморфна в окрестности кривой  $\gamma$ . Докажите, что  $\oint_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$  – чисто мнимое число.

**13.** Вычислите интегралы (а)  $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2} dx dy$ , (б)  $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}} dx dy$ .

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).