Семинар 5.

В задачах 1-5 предполагается, что основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику $\neq 2$, $Q \subset \mathbb{P}^3$ - невырожденная квадрика по Штейнеру в $\mathbb{P}^3$, а S_1 и S_2 две серии образующих прямых на Q.

Напомним, что *полярой прямой* $l \subset \mathbb{P}^3$ *относительно квадрики* Q называется прямая $p_lQ = \bigcap\limits_{a\in l} p_aQ$ пересечения поляр всех точек прямой l относительно Q. На семинаре 5 мы выяснили, что $x \in l$ тогда и только тогда, когда $p_lQ \subset p_xQ$. Кроме того, на семинаре 5 мы получили решение задачи 4 к семинару 4. В частности, когда прямая l в $\mathbb{P}^3$ пересекает квадрику Q в двух различных точках x и y, мы нашли геометрическую конструкцию поляры p_lQ прямой l по точкам x, y и сериям S_1 и S_2 образующих прямых на Q. Этими и другими задачами из семинара 4 полезно воспользоваться при решении задач 1 и 2 ниже.

Задача 1. Для точки $a \notin Q$ рассмотрим полярную плоскость $\pi = p_aQ$ и в ней конику $C = \pi \cap Q$. Для произвольной прямой l, не проходящей через точку a, обозначим через $pr_{a,\pi}(l)$ ее проецию из точки a на плоскость π, то есть прямую $\langle a, l\rangle \cap \pi$. Опишите множество прямых $\{pr_{a,\pi}(l) \mid l \in S_1 \sqcup S_2\}$ - проекций прямых из серий S_1 и S_2 на плоскость π.

Задача 2. Рассмотрим две тройки различных прямых $a,\ c,\ e \in S_1$ и $b,\ d,\ f \in S_2$ и обозначим точки $A = a \cap b$, $B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap e$, $E = e \cap f$, $F = f \cap a$. Эти точки образуют пространственный 6-вершинник $ABCDEF$. Докажите, что главные диагонали AD, BE, CF этого пространственного 6-вершинника пересекаются в точке.

Задача 3. Выведите из задач 1 и 2 теорему Брианшона.

Задача 4. Пусть $l,\ m,\ n,\ p$ - попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Нас интересуют прямые, пересекающие эти 4 прямые.
1) Если число интересующих нас прямых конечно, то сколько их может быть?
2) Может ли это число быть бесконечным?