

СЕМИНАР 6

Примеры лагранжевых механических систем

Тему о работе силы и условиях потенциальности мы завершим одним примером, который иллюстрирует достаточную жесткость (ограниченность) условий потенциальности.

Пример 1. Компоненты силы \vec{F} в сферических координатах пространства \mathbb{R}^3 заданы следующими выражениями:

$$F_r = r^\alpha \sin(\theta)\Phi(\phi), \quad F_\theta = R(r)Y(\theta) \sin^2(\phi), \quad F_\phi = Z(r, \phi),$$

где α — вещественный параметр, а Φ , R , Y и Z — некоторые гладкие функции своих аргументов в пространстве в $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$. Кроме того, известно асимптотическое поведение функции $Z(r, \phi)$ при стремлении точки пространства \mathbb{R}^3 в бесконечность вдоль луча $x = y > 0, z = 0$: в этом пределе функция Z имеет асимптотику $Z \sim r^{-2}$. Нужно найти общий вид функций Φ , R , Y и Z , а также значение параметра α , при которых сила \vec{F} будет потенциальной.

Решение. Задача сводится к анализу дифференциальных уравнений на искомые функции, которые даются необходимыми условиями потенциальности. Обратимся к этим условиям.

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} \Rightarrow r^\alpha \cos(\theta)\Phi(\phi) = (rR)' Y(\theta) \sin^2(\phi),$$

где штрих означает производную по переменной r . Перепишем полученное уравнение, разделив переменные:

$$\frac{\cos(\theta)}{Y(\theta)} \frac{\Phi(\phi)}{\sin^2(\phi)} = \frac{(rR(r))'}{r^\alpha}. \quad (1)$$

В силу независимости переменных r , θ и ϕ , отношения функций, входящих в это уравнение, могут быть только некоторыми константами:

$$\frac{(rR(r))'}{r^\alpha} = C_1, \quad \frac{\cos(\theta)}{Y(\theta)} = \frac{1}{C_2}, \quad \frac{\Phi(\phi)}{\sin^2(\phi)} = C_3,$$

связанными условием $C_3 = C_1 C_2$ в силу уравнения (1) (выбор C_2 в знаменателе сделан для последующего удобства).

Таким образом, произвол в функциях $Y(\theta)$ и $\Phi(\phi)$ свелся к постоянным множителям

$$Y(\theta) = C_2 \cos(\theta), \quad \Phi(\phi) = C_1 C_2 \sin^2(\phi),$$

а для функции $R(r)$ получилось простейшее дифференциальное уравнение первого порядка, которое элементарно интегрируется:

$$(rR(r))' = C_1 r^\alpha \Rightarrow R(r) = \frac{C_1}{\alpha + 1} r^\alpha + \frac{D}{r},$$

где D — еще одна произвольная константа.

Следующее условие потенциальности приводит к алгебраическому уравнению

$$\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \sin(\theta)F_\phi)}{\partial \theta} \Rightarrow R(r)Y(\theta) \sin(2\phi) = \cos(\theta)Z(r, \phi),$$

которое позволяет найти функцию $Z(r, \phi)$ по частично известным R и Y :

$$Z(r, \phi) = R(r) \frac{Y(\theta)}{\cos(\theta)} \sin(2\phi) = C_2 \left(\frac{C_1}{\alpha + 1} r^\alpha + \frac{D}{r} \right) \sin(2\phi).$$

Заметим, что зависимость от θ ушла в силу того, что отношение $Y/\cos(\theta) = C_2$. Если бы этого не случилось, то функция $Z(r, \phi)$ оказалась бы зависящей еще и от переменной θ . Данное противоречие означало бы, что сила \vec{F} не может быть сделана потенциальной никаким выбором произвольных функций R, Y, Φ и Z в выражениях ее компонент.

Нетрудно убедиться, что третье условие потенциальности

$$\frac{\partial F_r}{\partial \phi} = \frac{\partial(r \sin(\theta) F_\phi)}{\partial r}$$

уже выполняется тождественно и не накладывает никаких ограничений на константы α, C_i и D .

Дальнейшее уточнение значений констант происходит при учете асимптотики функции Z при $r \rightarrow \infty$ вдоль луча $x = y > 0$ в плоскости $z = 0$. На этом луче $\phi = \pi/4$, следовательно, $\sin(2\phi) = 1$, и мы приходим к такому условию:

$$Z(r, \pi/4)|_{r \rightarrow \infty} = \left(\frac{C_1 C_2}{\alpha + 1} r^\alpha + \frac{C_2 D}{r} \right)|_{r \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Это условие приводит к фиксации констант: $\alpha = -2, C_1 C_2 = -1, D = 0$.

Таким образом, общий вид потенциальной силы \vec{F} , заданной в условии задачи, фиксируется однозначно:

$$F_r = -r^{-2} \sin(\theta) \sin^2(\phi), \quad F_\theta = r^{-2} \cos(\theta) \sin^2(\phi), \quad F_\phi = r^{-2} \sin(2\phi).$$

Нетрудно найти соответствующую потенциальную энергию $U(r, \theta, \phi)$:

$$U(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{r} \sin(\theta) \sin^2(\phi).$$

Функция потенциальной энергии 2π -периодична по ϕ , следовательно сила \vec{F} потенциальна во всем пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ — ее работа вдоль любого замкнутого контура, лежащего в этом пространстве, равна нулю.

Рассмотрим теперь примеры построения функции Лагранжа для механических систем с анализом соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа, законов сохранения и т.п.

Напомним, что любое построение лагранжиана должно начинаться с определения числа степеней свободы модельной системы и выбора удобных обобщенных координат, количество которых равно числу степеней свободы. Удачный выбор этих обобщенных координат во многом определяет успех при решении механических задач. Для механических систем, в которых отсутствуют связи (то есть, ограничения на движение составляющих систему тел в виде каких-то поверхностей, стержней и т.д.), как правило удобно выбирать декартовы координаты в качестве обобщенных координат, так как в этих координатах просто записывается кинетическая энергия системы. Однако, свойства симметрии (потенциальных) сил, действующих в системе, могут диктовать

и другой выбор обобщенных координат (например, сферических при движении в центральном поле).

Для систем со связями (например, частиц, движущихся по заданной поверхности: сфере, гиперболоиду и т.п.) особенно важно найти удобные обобщенные координаты, параметризующие конфигурационное пространство системы, которые были бы независимы друг от друга. Обычно лобовое разрешение уравнений связи (, к тому же, не всегда возможное) — не самый удачный способ действий.

Выбрав обобщенные координаты, нужно выразить в их терминах декартовы координаты частиц и подставить в формулу для кинетической энергии $T = \sum m(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}})/2$. Получившееся выражение будет выражать кинетическую энергию в виде квадратичной функции обобщенных скоростей. Аналогичную подстановку надо сделать в формулу потенциальной энергии системы, а затем записать Лагранжиан в виде разности $L = T - U$.

Проиллюстрируем эти особенности на примере частицы на поверхности параболоида вращения.

Пример 2. Частица массы m движется в пространстве \mathbb{R}^3 по поверхности параболоида вращения, заданной в декартовой системе координат уравнением

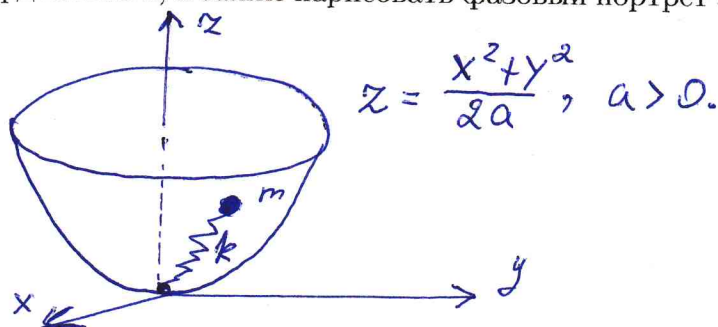
$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a}, \quad a > 0.$$

Частица соединена с началом координат невесомой пружиной с коэффициентом упругости (жесткостью) k , потенциальная энергия деформации пружины задается формулой

$$U = \frac{kr^2}{2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат евклидоваго расстояния от текущего положения частицы до начала координат. Выбрав подходящие обобщенные координаты, построить Лагранжиан системы, выписать уравнения Эйлера-Лагранжа и исследовать возможность решения с постоянной координатой z , а также нарисовать фазовый портрет эффективной одномерной системы.

Решение.



Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат можно, в принципе, выбирать две декартовы координаты x и y частицы, но тогда формулы для кинетической и потенциальной энергий и, соответственно, Лагранжиана, сильно усложнятся и анализ уравнений Эйлера-Лагранжа, как и поиск интегралов движения, станут весьма трудоемкими. В данном случае, в силу осевой вращательной симметрией поверхности, на которой находится частица, и симметрии относительно любых вращений потенциальной энергии, подходящим выбором являются полярные координаты проекции частицы m на плоскость $z = 0$.

Выбрав обобщенные координаты (ρ, ϕ) , выражаем через них декартовы координаты частицы и уравнение связи:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = \frac{\rho^2}{2a}.$$

Вычисляем производные по времени и подставляем в формулу кинетической энергии, выраженной в декартовых координатах:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2/a^2) + \rho^2\dot{\phi}^2),$$

где было учтено, что $\dot{z} = \rho\dot{\rho}/a$.

Кинетическая энергия зависит только от квадратов обобщенных скоростей и не содержит смешанных произведений скоростей типа $\dot{\rho}\dot{\phi}$. Это было бы не так, если бы мы выбрали x и y в качестве обобщенных координат, поскольку тогда для скорости \dot{z} получилось бы выражение $\dot{z} = (x\dot{x} + y\dot{y})/a$ и после возведения в квадрат в кинетической энергии появились бы слагаемые с $\dot{x}\dot{y}$. Эти слагаемые существенно усложняют систему уравнений Эйлера-Лагранжа.

Подставив уравнение связи $z = \rho^2/2a$ в формулу потенциальной энергии, получаем ее выражение в терминах обобщенных координат:

$$U = \frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k\rho^2}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right).$$

Итак, Лагранжиан нашей системы принимает вид:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2/a^2) + \rho^2\dot{\phi}^2) - \frac{k\rho^2}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right).$$

Лагранжиан не зависит от обобщенной координаты ϕ (циклическая координата) и не зависит явно от времени $\partial L/\partial t = 0$.

Подчеркнем еще раз, что цикличность координаты ϕ , которая позволяет сразу написать один из интегралов движения частицы, есть следствие надлежащего учета симметрий задачи при выборе обобщенных координат. Если в качестве обобщенных координат выбрать декартовы координаты x и y , то циклических координат не будет — Лагранжиан будет зависеть и от x , и от y , поэтому формула интеграла движения (отвечающего циклической координате ϕ в нашем выборе) довольно громоздка, а поиск этого интеграла совсем не прост.

Получим теперь уравнения Эйлера-Лагранжа — динамические уравнения движения нашей системы. Уравнений будет два — по числу степеней свободы системы.

Общая формула уравнения Эйлера-Лагранжа по обобщенной координате ρ :

$$L_\rho = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0.$$

Подставив в нее явный вид Лагранжиана, получаем первое уравнение:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\rho}(1 + \rho^2/a^2)) - m\rho(\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2/a^2) + k\rho(1 + \rho^2/(2a^2)) = 0. \quad (2)$$

Второе уравнение получается из аналогичной общей формулы для обобщенной координаты ϕ :

$$L_\phi = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\phi}) = 0.$$

Здесь мы воспользовались цикличностью координаты ϕ , в силу которой $\partial L/\partial \phi = 0$. Заметим, что это уравнение *не нужно* превращать в уравнение второго порядка, вычисляя производную. Из него немедленно следует закон сохранения следующего вида:

$$m\rho^2\dot{\phi} = J = \text{const}. \quad (3)$$

Другими словами, на решениях $(\rho(t), \phi(t))$ уравнений Эйлера-Лагранжа функция, стоящая в левой части, не зависит от времени. Физический смысл сохраняющейся величины $m\rho^2\dot{\phi}$ — это z -компонента вектора момента импульса $\vec{J} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, записанная в полярных координатах. Ее сохранение связано с симметрией вращения вокруг оси Oz :

$$(\vec{J})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\rho^2\dot{\phi}.$$

Полученная нами система уравнений Эйлера-Лагранжа — сложная нелинейная система дифференциальных уравнений и ее общее решение при произвольных начальных данных можно искать только численными методами на компьютере. Однако некоторые частные решения вида найти и исследовать довольно просто. Одно из таких решений отвечает движению с постоянной координатой z : $z(t) = z + 0 = \text{const}$. Поскольку частица все время находится на поверхности параболоида, то это эквивалентно движению с постоянной координатой ρ : $\rho(t) = \rho_0$, $z_0 = \rho_0^2/(2a^2)$.

Если $\rho(t) = \rho_0$, то $\dot{\rho}(t) = 0$ и уравнение (2) дает связь параметра ρ_0 и угловой скорости $\dot{\phi}$, которая тоже оказывается постоянной:

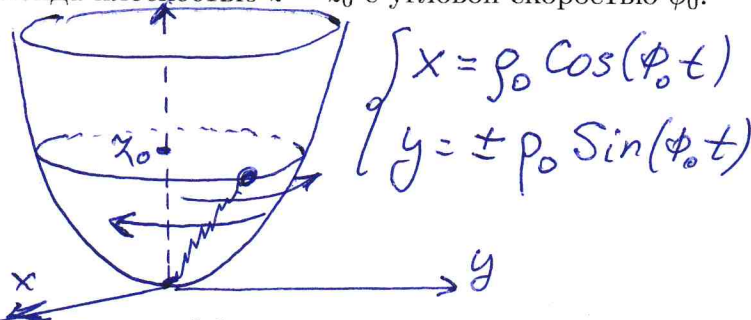
$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right) = \text{const}.$$

Два возможных знака $\dot{\phi}_0$ отвечают вращениям по и против часовой стрелки вокруг оси Oz на одном и том же уровне z_0 . Подчеркнем, что задание ρ_0 однозначно фиксирует модуль угловой скорости, необходимый для вращения на уровне $z_0 = \rho_0^2/(2a^2)$. С этой точки зрения соотношение (3) определяет значение углового момента при заданном ρ_0 :

$$J_0 = \pm \rho_0^2 \sqrt{mk \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right)}. \quad (4)$$

Если просто разрешить (3) относительно $\dot{\phi}$, то мы получим, что для фиксации значения постоянной угловой скорости требует задание *двух* констант — J_0 и ρ_0 , вместо одной ρ_0 .

Итак, наше решение представляет собой равномерное вращение частицы по окружности сечения параболоида плоскостью $z = z_0$ с угловой скоростью $\dot{\phi}_0$.



Рассмотрим теперь переход к эффективной одномерной системе и построение соответствующего фазового портрета. У нас имеется два интеграла движения (два закона сохранения): z -компонента момента импульса (3) и полная энергия системы $E = T + U$, сохранение которой обеспечено независимостью Лагранжиана от времени $\partial L/\partial t = 0$. Выразив $\dot{\phi}$ из (3) и подставив в формулу полной энергии E , получаем следующее выражение для E , которое зависит только от *одной* обобщенной координаты ρ и ее скорости $\dot{\rho}$:

$$E = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{2m\rho^2} + \frac{k\rho^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2} \right) = T_{\text{eff}} + U_{\text{eff}}.$$

Это выражение можно интерпретировать как полную энергию одномерной “частицы” (с координатой ρ), масса которой зависит от ее положения

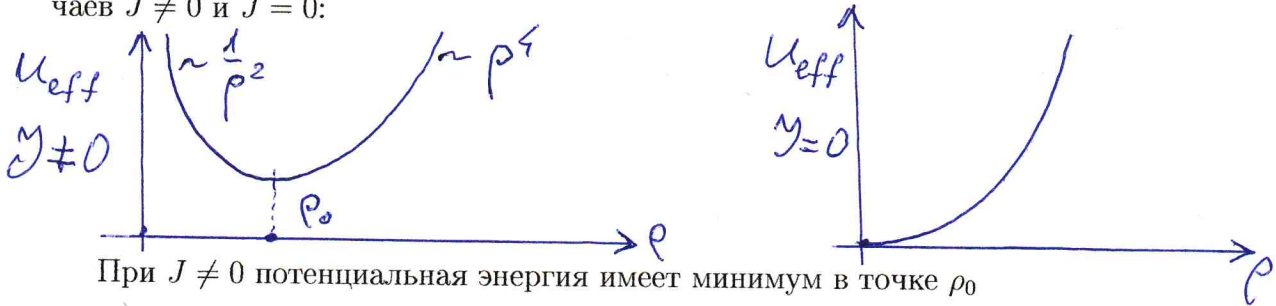
$$m(\rho) = m \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \Rightarrow T_{\text{eff}} = \frac{m(\rho)\dot{\rho}^2}{2},$$

и которая движется в силовом поле с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2m\rho^2} + \frac{k\rho^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2} \right).$$

Эффективная потенциальная энергия представляет собой сумму исходной потенциальной энергии упругой деформации пружины и “центробежного слагаемого” $J^2/(2m\rho^2)$, которое исключает (при $J \neq 0$) прохождение траектории частицы через начало координат (нижнюю точку параболоида).

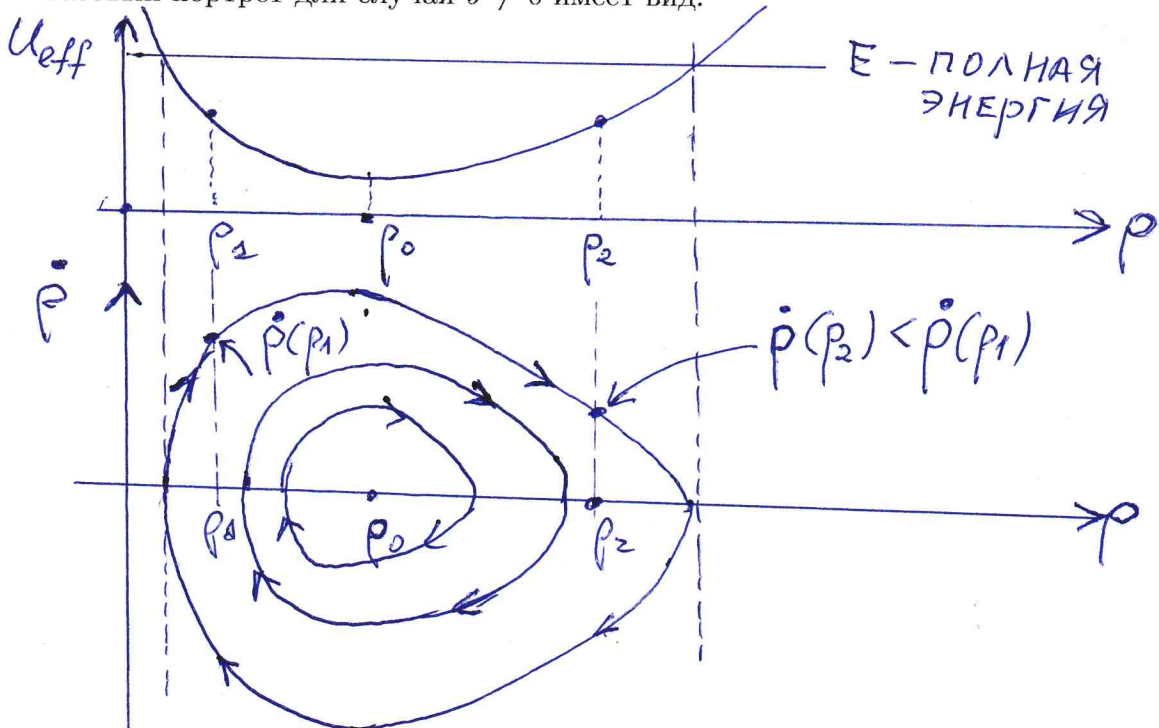
Нарисуем графики эффективной потенциальной энергии для двух различных случаев $J \neq 0$ и $J = 0$:



$$\frac{dU_{\text{eff}}(\rho_0)}{d\rho} = -\frac{J^2}{m\rho_0^3} + k\rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right) = 0 \Rightarrow J^2 = mk\rho_0^4 \left(1 + \frac{\rho_0^2}{2a^2} \right),$$

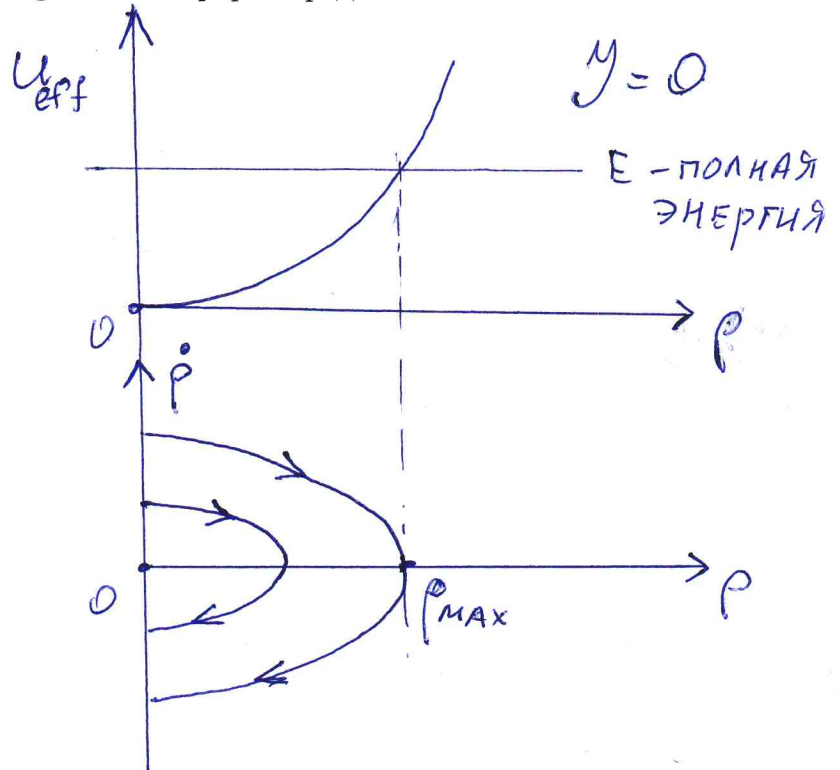
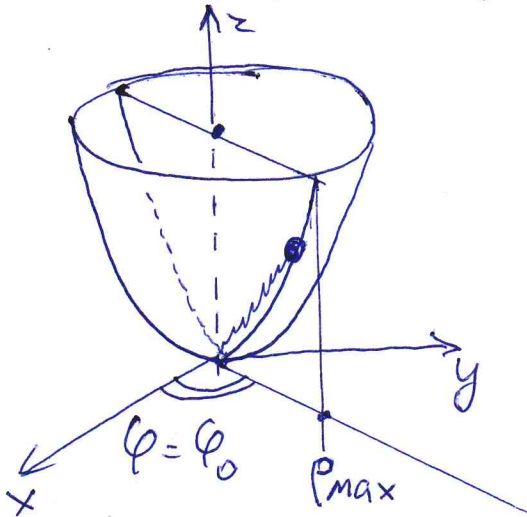
которая отвечает стационарному по ρ движению с постоянной угловой скоростью, рассмотренному выше (см. формулу (4)).

Фазовый портрет для случая $J \neq 0$ имеет вид:



Обратите внимание на специфическую несимметричность фазовых кривых возле левой и правой точек поворота. Так проявляется зависимость “массы” $m(\rho)$ от координаты ρ . В точках ρ_1 и ρ_2 (см. рисунок выше) потенциальная энергия имеет одно и то же значение $U_{\text{eff}}(\rho_1) = U_{\text{eff}}(\rho_2)$, поэтому кинетические энергии в этих точках также совпадают $T_{\text{eff}}(\rho_1) = T_{\text{eff}}(\rho_2)$. Но, поскольку $\rho_1 < \rho_2$, то в точке ρ_1 частица “легче” $m(\rho_1) < m(\rho_2)$, и чтобы обладать такой же кинетической энергией, как в точке ρ_2 , она должна иметь большую скорость в ρ_1 .

Случай $J = 0$ означает $\dot{\phi} = 0$, то есть, $\phi(t) = \phi_0 = \text{const}$. Частица совершает ангармонические колебания вдоль параболы — линии сечения параболоида вертикальной плоскостью $\phi = \phi_0$. Соответствующий фазовый портрет представлен ниже.



Пример 3. Регулятор Уатта

Первоначально центробежный регулятор был предложен первооткрывателем центробежной силы Христианом Гюйгенсом (Голландия) и использовался в ветряных мельницах для регулировки расстояния и давления между жерновами (XVII век). В 1788 году этот регулятор был адаптирован Джеймсом Уаттом (или Уатта) (Шотландия) для регулировки давления пара в котлах паровых машин.

Модель регулятора Уатта состоит из четырех (невесомых и жестких) стержней длины l . Стержни соединены шарнирами в ромб, концы стержней расположены в одной плоскости, одна вершина ромба закреплена в начале координат O , на двух соседних вершинах закреплены грузики массой m , на противоположной вершине закреплена муфта массы M . Муфта может свободно двигаться вдоль оси Oz , грузики свободно вращаются вокруг оси Oz (см. рис. 1). Вдоль оси Oz вниз действует однородная сила тяжести с ускорением \vec{g} .

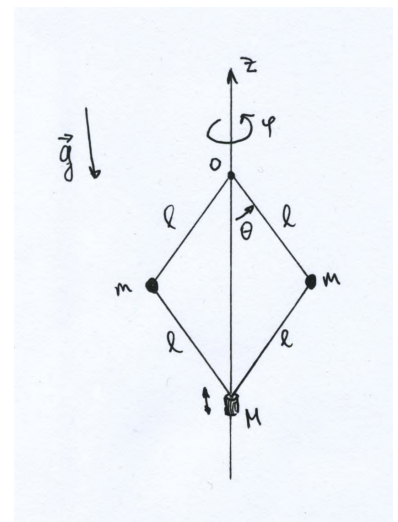


Рис. 1

Число степеней свободы системы – 2, это углы θ и φ (см. рис. 1).

Конфигурационное пространство системы – полусфера: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому нужно найти кинетическую энергию трех грузиков, составляющих систему, и сложить их:

$$T = \frac{M}{2} \left(\frac{d(2l \cos \theta)}{dt} \right)^2 + 2 \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2 \right), \quad (1)$$

где $\dot{l}^2 = 0$ так как $l = \text{const}$. Потенциальная энергия:

$$U = Mg(-2l \cos \theta) + 2mg(-l \cos \theta), \quad (2)$$

где было использовано то, что координаты муфты M и грузиков m по оси Oz это $(-2l \cos \theta)$ и $l \cos \theta$, соответственно. Потенциальная энергии системы тоже величина аддитивная. Она состоит из потенциальных энергий парных взаимодействий тел системы (в модели регулятора Уатта таких нет) и потенциальных энергий тел системы во внешнем силовом поле (поле тяжести в нашем случае). Лагранжиан системы представляется в виде

$$L = T - U = (m + 2M \sin^2 \theta) l^2 \dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + 2(m + M)gl \cos \theta. \quad (3)$$

Вообще говоря L , как функция на касательном расслоении конфигурационного пространства, может зависеть от координат φ , θ и скоростей $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$. В нашем случае зависимость L от φ отсутствует.

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

- по переменной φ :

$$L_\varphi := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \quad (4)$$

Это уравнение легко интегрируем по переменной t и получаем закон сохранения "обобщенного импульса отвечающего переменной φ (см. записки лекции 5. Лагранжев формализм: определения, примеры, свойства.):

$$J := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (5)$$

Физически этот обобщенный импульс есть угловой момент вращения системы вокруг оси Oz .

- по переменной θ :

$$L_\theta := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(2l^2 (m + 2M \sin^2 \theta) \dot{\theta} \right) - \left(2Ml^2 \dot{\theta}^2 + ml^2 \dot{\varphi}^2 \right) \sin 2\theta + 2(m + M)gl \sin \theta = 0. \quad (6)$$

Это уравнение сложное и искать его общее решение особого смысла нет. Можно, например, проанализировать наличие частного режима стационарного по θ движения: $\theta = \text{const} = \theta_0$.

$$L_\theta \Big|_{\theta=\theta_0} = -ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta_0 + 2(m + M)gl \sin \theta_0 = 0. \quad (7)$$

Случай $\sin \theta_0 = 0$ – неинтересен. Решая (7) получим соотношения между $\dot{\varphi}$ и θ :

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{(m + M)g}{ml \cos \theta}. \quad (8)$$

Это стационарное решение ($\theta = const, \dot{\varphi} = const$) удовлетворяет и уравнению (4), при чем значения обобщенного импульса J (5) для него фиксируется:

$$J^2 = 4m^2 l^4 \sin^4 \theta_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{4m(m + M)gl^3 \sin^4 \theta_0}{\cos \theta_0}. \quad (9)$$

Для качественного изучения всех движений системы удобно вместо уравнения $L_\theta = 0$ использовать ещё один закон сохранения – закон сохранения энергии (см. записки лекции 5. Лагранжев формализм: определения, примеры, свойства.). Так как $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то

$$E = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = T + U = const, \quad (10)$$

где последнее равенство ($E = T + U$) – это частная формула, пригодная для нерелятивистской механики. В итоге получаем, что

$$E = (m + 2M \sin^2 \theta)l^2 \dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - 2(m + M)gl \cos \theta. \quad (11)$$

Стоит отметить, что $E = const$ можно вывести из уравнения (6), умножив его на интегрирующий множитель $(m + 2M \sin^2 \theta)\dot{\theta}$ и проинтегрировав по t . Для анализа закона сохранения энергии (10) подставим в него выражение для $\dot{\varphi}$ из закона сохранения углового момента (5):

$$E = \underbrace{(m + 2M \sin^2 \theta)l^2 \dot{\theta}^2}_{T_{\text{эфф.}}(\theta, \dot{\theta})} + \underbrace{\frac{J^2}{4ml^2 \sin^2 \theta} - 2(m + M)gl \cos \theta}_{V_{\text{эфф.}}(\theta)} = const. \quad (12)$$

Это выражение выглядит как закон сохранения энергии для "эффективной" 1-мерной системы с координатой θ , потенциальной энергией $V_{\text{эфф.}}(\theta)$ и со специфической кинетической энергией $T_{\text{эфф.}}(\theta, \dot{\theta})$, зависящий не только от квадрата скорости $\dot{\theta}^2$, но и от координат θ (эффективная масса частицы зависит от θ).

Фазовый портрет этой эффективной системы нарисован на рис. 2. Некоторые комментарии к рисунку:

- синим цветом со на графике обозначено вращательная часть $V_{\text{эфф.}}$: $\frac{J^2}{4ml^2 \sin^2 \theta}$;
- черным цветом обозначено гравитационная часть $V_{\text{эфф.}}$: $-2gl(m + M) \cos \theta$;
- две несовпадающие точки при $\theta = \pi/2$ на нижнем графике – это "крах" регулятора: муфта M ударяется о точку крепления стержней O ;
- состояние устойчивого равновесия $\theta = \theta_0$ определяется условием

$$\frac{d}{d\theta} V_{\text{эфф.}}(\theta) = 0, \quad \implies \quad J^2 = \frac{4m(m + M)gl^3 \sin^4 \theta}{\cos \theta}. \quad (13)$$

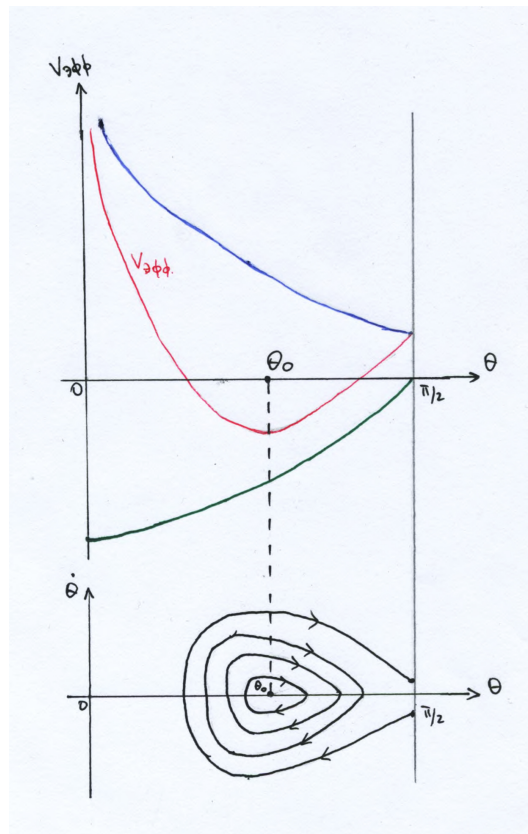


Рис. 2

Это то самое стационарное по θ движение, которое мы анализировали выше. В окрестности устойчивого равновесия $\theta = \theta_0$ фазовые траектории системы по θ – сплюснутые справа эллипсы. С ростом θ эффективная масса 1-мерной системы растет: в окрестности $\theta = 0$ эффективная масса $m_{\text{эфф.}} = 2m$, а в окрестности $\theta = \pi/2$ эффективная масса $m_{\text{эфф.}} = 2(m + 2M)$.