Семинар 22.02.2022г.
Анализ лагранжевых механических систем: примеры.

Пример 1. Эллиптический маятник

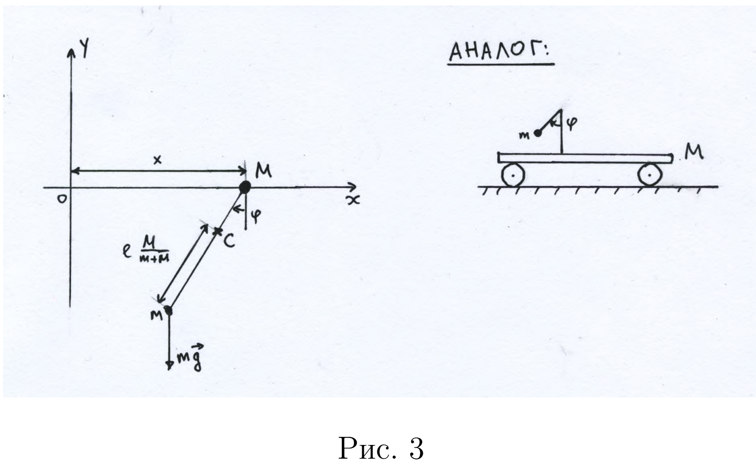


Рис. 3

Две массы m и M соединены (невесомым, нерастяжимым) стержнем длины l. M может свободно перемещаться вдоль оси $O\vec{x}$, m вращается вокруг M а плоскости xOy. Вдоль оси $O\vec{y}$ вниз действует однородная сила тяжести с ускорением $\vec{g}$, рис. 3. Точка C на рисунке – центр масс.

<u>Число степеней свободы системы</u> – 2. Это координата x – позиция массы M по оси $O\vec{x}$ и φ – угол отклонения стержня от оси $\vec{y}$.

<u>Конфигурационное пространство системы</u> – $\mathbb{R}^1 \times \mathcal{S}^1$, где $x \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Кинетическая энергия – это квадратичная форма скоростей по $\dot{x}, \dot{\varphi}$, но она не диагональная

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d(x + l\sin\varphi)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(-l\cos\varphi)}{dt}\right)^2\right] =$$
$$\frac{m+M}{2}\dot{x}^2 + ml\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2, \tag{14}$$

а потенциальная энергия имеет вид

$$U = -mgl\cos\varphi. \tag{15}$$

Выбранные координаты не оптимальны, поскольку кинетическая энергия T, (14), в них не является диагональной квадратичной формой скоростей. Вспомним, что в лекции 3 (Задача Кеплера) и лекции 5 (Лагранжев формализм: определения, примеры, свойства), мы переходили в систему центра масс. Это стоит делать всегда, когда набор взаимодействующих частиц (составленных частей системы) движется <u>без ограничений</u> в пространстве.

Напомним основные вещи **о системе центра масс**.

<u>**Теорема о центре масс:**</u> если система состоит из набора частиц m_i, $\vec{r}_i$, где $i = 1, ..., n$, движущихся без внешних ограничений, то выбирая в качестве новых координат

$$\begin{cases} \vec{R} \equiv \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \text{ – координаты центра масс системы,} \\ \vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{R} \text{ – координаты частиц в системе центра масс,} \end{cases} \tag{16}$$

получаем выражение для кинетической энергии системы в виде

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_1\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\dot{\vec{s}}_i^{\,2}}{2}, \tag{17}$$

где $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей системы; $\vec{s}_i$ – не являются линейно независимыми: $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{s}_i = 0$. Переход от $\vec{r}_i$ к $\vec{R}$ и $\vec{s}_i$ полезен, когда потенциальная энергия взаимодействия частиц $\vec{r}_i$ (или жесткие связи между ними) зависят только от их положения друг относительно друга.

В нашем примере удобно использовать координату центра масс системы по оси $O\vec{x}$:

$$X = \frac{Mx + m(x + l\sin\varphi)}{m+M}. \tag{18}$$

Заменив $x \mapsto X$ получаем (проверьте самостоятельно):

$$T = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2, \tag{19}$$

т.е. форма кинетической энергии приобрела диагональный вид. Тогда лагранжиан приобретает вид

$$L = T - U = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi. \tag{20}$$

Рассмотрим уравнения Эйлера-Лагранжа:
<u>по переменной X</u>:

$$L_X := \frac{d}{dt}\left((m+M)\dot{X}\right) = 0, \quad \Longrightarrow \quad (m+M)\dot{X} = const, \tag{21}$$

т.е. получили закон сохранения импульса системы вдоль оси $O\vec{x}$.
<u>по переменной φ</u>:

$$L_\varphi := ml^2\frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}\right] - \frac{ml^2}{2}\frac{m}{m+M}\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi + mgl\sin\varphi = 0. \tag{22}$$

Это уравнение сложное, и вместо него лучше анализировать закон сохранения энергии, а из этого уравнения лишь извлечь информацию о стационарном по φ решении: $\varphi = \varphi_0 = const$,

$$L_\varphi\Big|_{\varphi=const} = mgl\sin\varphi_0 = 0, \tag{23}$$

откуда находим, что имеется лишь две стационарных траектории $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Так как $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$, имеем закон сохранения энергии: $E = T + U$. Исключая из него кинетическую энергию движения центра масс по оси $O\vec{x}$ (это константа – (21)), получим

$$\mathcal{E} = E - \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 = \frac{ml^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi. \tag{24}$$

Это эффективная одномерная система, похожая на математический маятник, но только с переменной массой $m(\varphi) = m\left(1 - \dfrac{m}{m+M}\cos^2\varphi\right)$.

Фазовый портрет (24) представлен на рис. 4:

- точка A – устойчивое равновесие, $\varphi = \dot{\varphi} = 0$; точка D – точка неустойчивого равновесия, $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$. Точки равновесия – это те самые две стационарных по φ траектории движения, что мы получили раньше, (23);
- точки B и C – локальные минимумы, который возникают из-за переменности $m(\varphi)$.

В заключении объясним название маятника. Если перейти в систему центра масс только по оси $O\vec{x}$, то координата массы m – (x_m, y_m) имеет вид, рис.5 :

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{M}{m+M}l\sin\varphi, \\ y_m = -l\cos\varphi, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_m^2}{\left(\dfrac{M}{m+M}l\right)^2} + \frac{y_m^2}{l^2} = 1, \tag{25}$$

т.е. частица движется в этой системе по эллипсу с большой полуосью l и малой полуосью $\dfrac{M}{m+M}l$.

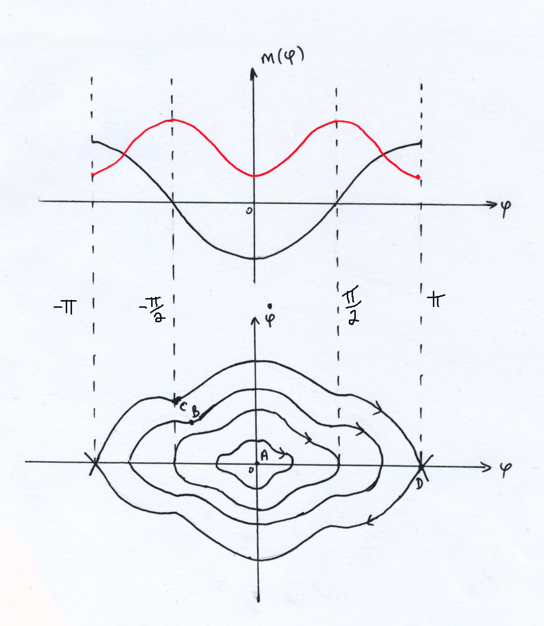


Рис. 4

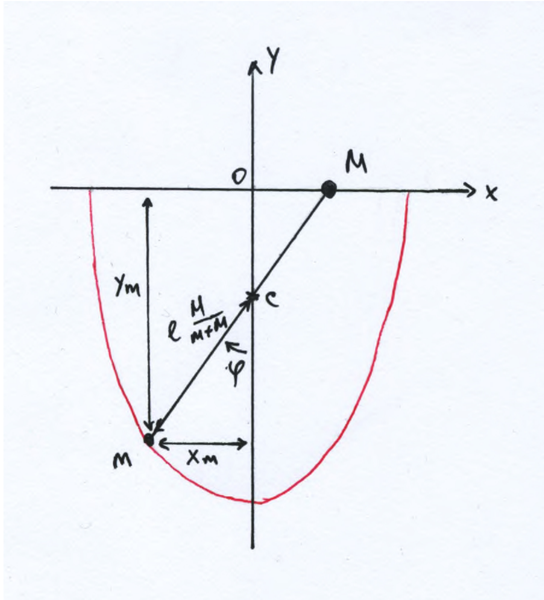
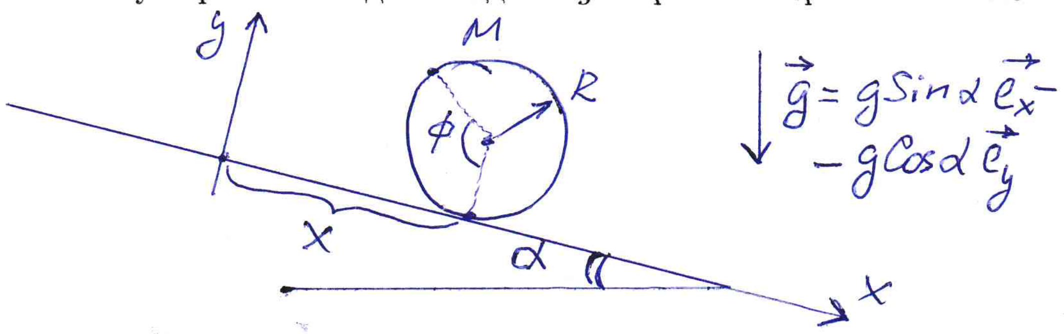


Рис. 5

Пример 2. Массивный однородный обруч массы M и радиуса R скатывается *без проскальзывания* по наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту α, однородное поле тяжести с ускоренем свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз (см. рисунок).



Поскольку проскальзывания обруча нет, то система имеет одну степень свободы. В качестве единственной обобщенной координты удобно выбрать величину x — координату ортогональной проекции геометрического центра обруча на ось Ox. Заметим, что в силу однородности обруча, его центр масс располагается как раз в геометрическом центре, так что наша обобщенная координата есть x-координата центра масс системы. Вторая декартова координата центра масс остается постоянной при движении: $y(t) = R$. Положение обруча в пространстве полностью фиксируется значением угла поворота ϕ, который связан с x простым соотношением (из-за отсутствия скольжения):

$$x = R\phi + \text{const}, \tag{1}$$

где несущественная константа учитывает положение центра обруча в момент, когда $\phi = 0$. Ее вполне можно положить равной нулю.

Чтобы построить Лагранжиан системы нам нужно получить выражения для кинетической и потенциальной энергий в терминах обобщенной координаты x ее скорости $\dot{x}$.

Для нахождения кинетической энергии воспользуемся теоремой о кинетической энергии твердого тела:

$$T = T_{\text{ц.м.}} + T_{\text{отн.}} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\left(R\dot{\phi}\right)^2.$$

Здесь $T_{\text{отн.}} = M(R\dot{\phi})^2/2$, так как все точки обруча вращаются вокруг центра масс по окружности радиуса R с одной и той же угловой скоростью $\dot{\phi}$, и, следовательно, имеют одну и ту же линейную скорость $v = R\dot{\phi}$. Учитывая связь (1) угла ϕ и координаты x, получаем окончательный ответ для кинетической энергии обруча:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\dot{x}^2 = M\dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия однородного обруча в поле тяжести:

$$U = -M(\vec{g}, \vec{r}_{\text{ц.м.}}).$$

В выбранной нами декартовой системе координат $\vec{g} = (g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$, $\vec{r}_{\text{ц.м.}} = (x, R)$ и, вычисляя скалярное произведение, получаем потенциальную энергиию в виде

$$U(x) = -Mgx\sin\alpha + \text{const}.$$

Таким образом, Лагранжиан системы записывается следующим образом:

$$L = T - U = M\dot{x}^2 + Mgx\sin\alpha.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для переменной x:

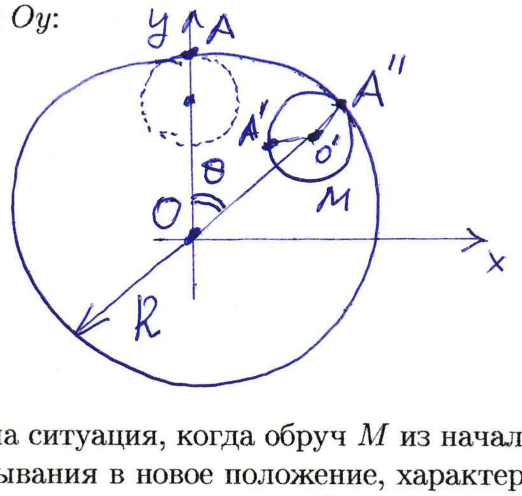
$$L_x := \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 2M\ddot{x} - mg\sin\alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\alpha.$$

Отметим, что $\ddot{x}$ есть проекция ускорения центра обруча на наклонную плоскость. Это ускорение в 2 раза меньше, чем было бы у обруча, скатывающегося по наклонной плоскости без трения (а значит и без вращения). Это эффект силы трения покоя в точке контакта обруча с поверхностью — единственной силы трения, для которой подходит лагранжев формализм. В отличие от силы трения скольжения, сила трения покоя не отбирает механическую энергию у системы. Ее роль сводится к уменьшению числа степеней свободы – у скользящего обруча было бы *две* степени свободы.

Рассмотрим еще одни пример, который показывает, что при определении кинетической энергии вращения относительно центра масс возможны некоторые тонкости. В частности, в нашем примере мы увидим, что происходит, когда обруч катится без проскальзывания не по прямой, а по искривленной траектории.

Пример 3. Обруч радиуса R неподвижно закреплен в плоскости xOy. Тонкий однородный обруч массы M и радиуса $r < R$ может кататься без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного обруча, все время оставаясь в плоскости xOy. Внешние силы отсутствуют. Нужно записать Лагранжиан системы и найти сохраняющиеся величины (интегралы движения), если они есть.

Система имеет одну степень свободы. Расположим начало декартовой системы координат в центре O закрепленного обруча, центр подвижного обруча обозначим O', а в качестве обобщенной координаты выберем угол θ между отрезком OO' и положительным направлением оси Oy:



На рисунке показана ситуация, когда обруч M из начального положения $\theta = 0$ прокатился без проскальзывания в новое положение, характеризуемое углом $\theta > 0$. Точка A' есть образ точки A при таком повороте, A'' — новая точка касания закрепленного и подвижного обручей. Отсутствие проскальзывания означает равенство длин дуг AA'' и $A'A''$ большого и малого обручей соответственно.

Поскольку внешние силы отсутствуют, Лагранжиан системы совпадает с кинетической энергией подвижного обруча. Кинетическую энергию найдем, воспользовавшись теоремой об отделении движения центра масс, как в предыдущем примере:

$$T = T_{\text{ц.м.}} + T_{\text{отн.}}. \tag{2}$$

В силу однородности обруча M, его центр масс находтся в геометрическом центре O', поэтому кинетическая энергия центра масс имеет вид: $T_{\text{ц.м.}} = M(\dot{x}_{O'}^2 + \dot{y}_{O'}^2)/2$. Таким образом, нам нужно только выразить декартовы координаты центра масс подвижного обруча через обобщенную координату θ :

$$x_{O'} = (R-r)\sin\theta, \qquad y_{O'} = (R-r)\cos\theta.$$

После этого кинетическая энергия движения центра масс выражается простой формулой:

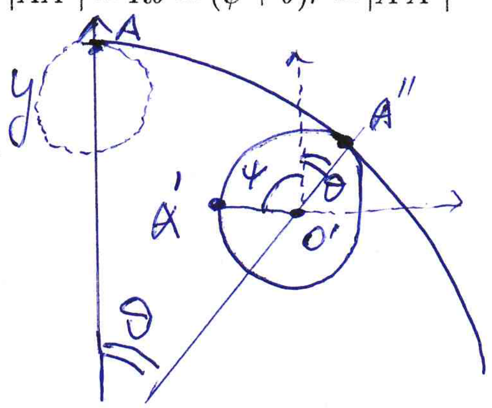
$$T_{\text{ц.м.}} = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_{O'}^2 + \dot{y}_{O'}^2\right) = \frac{M}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

Второе слагаемое — энергия относительного движения $T_{\text{отн.}}$ — должно быть записано в системе отсчета центра масс. Важным условием справедливости формулы (2) является требование, чтобы координатные оси системы отсчета центра масс в *любой момент* времени были бы параллельны координатным осям инерциальной декартовой системы отсчета. Относительное движение подвижного обруча представляет собой вращение вокруг центра масс, поэтому

$$T_{\text{отн.}} = \frac{M}{2}(r\dot{\psi})^2,$$

где ψ — угол поворота обруча M в системе *центра масс*. Этот угол *не равен* углу, опирающемуся на дугу $A'A''$, он меньше на θ (см. рисунок ниже). Как уже упоминалось выше, в силу отсутствия проскальзывания $|AA''| = |A'A''|$ и мы имеем равенство для определения угла поворота ψ:

$$|AA''| = R\theta = (\psi+\theta)r = |A'A''| \quad \Rightarrow \quad r\psi = (R-r)\theta.$$



Таким образом, энергия относительного движения записывается в виде:

$$T_{\text{отн.}} = \frac{M}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2,$$

а Лагранжиан, соответственно, дается формулой:

$$L = T = M(R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

Лагранжиан не зависит от переменной θ (циклическая координата), поэтому один из законов сохранения имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2M(R-r)^2\dot{\theta} = \text{const},$$

откуда сразу следует $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ — подвижный обруч вращается с некоторой постоянной угловой скоростью ω. Второй интеграл движения — полная механическая энергия (следствие независимости L от времени) — в данном случае равен T. Этот интеграл функционально зависим от первого. Это не удивительно, поскольку в системе с одной степенью свободы не может быть двух функционально независимых интегралов движения.