Семинар 6.

Задача 1. Рассмотрим две тройки различных прямых $a,\ c,\ e \in S_1$ и $b,\ d,\ f \in S_2$ и обозначим точки $A = a \cap b,\ B = b \cap c,\ C = c \cap d,\ D = d \cap e,\ E = e \cap f,\ F = f \cap a$. Эти точки образуют пространственный 6-вершинник $ABCDEF$.
1) Докажите, что главные диагонали AD, BE, CF этого пространственного 6-вершинника пересекаются в точке.
2) Выведите отсюда и из задачи 1 к семинару 5 теорему Брианшона.

Задача 2. Пусть $l,\ m,\ n,\ p$ - попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Нас интересуют прямые, пересекающие эти 4 прямые.
1) Если число интересующих нас прямых конечно, то сколько их может быть?
2) Может ли это число быть бесконечным?

В следующих задачах $\mathbf{k}$ - ое поле, A - коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над произвольным полем $\mathbf{k}$. (Например, $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$ - кольцо многочленов от n переменных над полем $\mathbf{k}$.) Дифференцированием в A называется линейный оператор $D:\ A \to A$ в A как векторном пространстве, удовлетворяющий правилу Лейбница $D(ab) = D(a)b + aD(b),\ a, b \in A$.

Задача 3. Пусть $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$. Напомним, что дифференцирование D кольца многочленов $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$, удовлетворяющее условиям $D(t_i) = 1$ и $D(t_j) = 0,\ j \neq i$, называется *частной производной по переменной* t_i и обозначается $\frac{\partial}{\partial t_i}$.
1) Докажите, что дифференцирование $\frac{\partial}{\partial t_i}$ существует и единственно.
2) Обозначим через $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}$ композицию операторов $\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j}$. Докажите, что $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2}{\partial t_j \partial t_i}$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Задача 4. 1) Пусть $F(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{k}[x_1, ..., x_n]$, $u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu) \in \mathbf{k}[\lambda, \mu, ..., \nu]$, и пусть $f(\lambda, \mu, ..., \nu) \equiv F(u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu))$. Докажите, что

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \lambda}.$$

2) Пусть $f \in \mathbf{k}[t]$ - многочлен от одной переменной, где $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ в этом случае обозначается также через $\frac{df}{dt}$ или $f'(t)$ и называется просто *(первой) производной* по t, а ее композиция с самой собой k раз называется *k-ой производной* по t и обозначается $\frac{d^k f}{dt^k}$ или $f^{(k)}(t)$. Пусть $\deg f = d$. Докажите формулу Тейлора

$$f = f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{t^d}{d!}f^{(d)}(0). \tag{1}$$

Задача 5. Пусть $a = (a_1, ..., a_n),\ b = (b_1, ..., b_n)$ - векторы в $\mathbf{k}^n$. Для любых $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ рассмотрим вектор $\lambda a + \mu b = (\lambda a_1 + \mu b_1, ..., \lambda a_n + \mu b_n)$. Пусть $F(x) \equiv F(x_1, ..., x_n) \in A = \mathbf{k}[x_1, ..., x_n]$ - *форма* степени d, то есть однородный многочлен степени d. Под $F(\lambda a + \mu b)$ будем понимать выражение $F(\lambda a_1 + \mu b_1, ..., \lambda a_n + \mu b_n)$. Обозначим через $f(\lambda)$ выражение $F(\lambda a + \mu b)$, если в нем фиксированы $a,\ b$ и μ.
1) Докажите, что

$$f'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=\mu b} = \mu^{d-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=b} = \mu^{d-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(b). \tag{2}$$

2) Рассмотрим дифференцирование (называемое *поляризацией в точке* a)

$$D_a:\ A \to A, \quad F(x) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x),$$

и пусть $D_a^k := D_a \circ ... \circ D_a$ - композиция D_a с собой k раз. Используя (1) и (2), докажите, что

$$\frac{d^k f}{d\lambda^k}(0) = \mu^{d-k}(D_a^k F)(b). \tag{3}$$