

Семинар 19

Через ξ_n обозначим примитивный корень степени n из единицы.

1. Найти $Gal(\xi_{24})$ над полем рациональных чисел.
2. Сколько подгрупп порядка 2 содержится в группе Галуа из задачи 1? Опишите их и найдите их неподвижные поля.
3. Рассмотрим поле алгебраических чисел K , содержащее число ξ_n , и обозначим через $L = K(u)$, $u^n = a$, для некоторого $a \in K$, простое радикальное расширение поля K . Доказать, что L/K – расширение Галуа с циклической группой Галуа. Ее порядок делит n .
4. Рассмотрим поле алгебраических чисел K . Доказать, что группа $Gal(K(\xi_n)/K)$ изоморфна подгруппе мультипликативной группы кольца вычетов $\text{mod } n$, а потому абелева. Ее порядок делит $\phi(n)$.
5. Пусть G – любая группа, а K – любое поле. Характером группы G со значениями в поле K называется гомоморфизм $\chi: G \rightarrow K^*$. Рассмотрим конечное число различных характеров группы G со значениями в поле K . Доказать, что они линейно независимы над K (Лемма Э.Артина).
6. Доказать следующую теорему Э.Артина: пусть L – любое поле, Γ – конечная группа автоморфизмов поля L и L^Γ – неподвижное поле группы Γ . Тогда L/L^Γ – это расширение Галуа с группой Галуа Γ .