Механика 2022

Домашнее задание № 4

Срок сдачи задания **14 марта 2022**

---

**1.** Клин с углом при основании $\alpha$ и массой $M$ может двигаться вдоль оси $O\vec{x}$. На вершине клина закреплен невесомый блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить с массами $m_1$ и $m_2$ на концах (см. рисунок 1). Тело $m_1$ перемещается по наклонной поверхности клина, тело $m_2$ — вдоль его вертикальной грани. Трение в системе отсутствует, однородная сила тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$ направлена вертикально вниз.

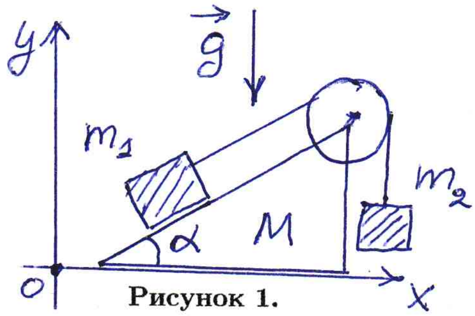


**Рисунок 1.**

а) Выберите обобщенные координаты и составьте Лагранжиан системы. Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

б) Определите имеющиеся законы сохранения и приведите их явный вид в терминах выбранных обобщенных координат.

**2.** Две частицы одинаковой массы $m$ связаны невесомой, нерастяжимой нитью. Нить пропущена через пренебрежимо малое отверстие в горизонтальной плоскости. Частица 1 движется по плоскости, частица 2 висит на нити под плоскостью и может двигаться только по вертикальной прямой (не раскачивается). Нить всегда натянута, трение отсутствует. На систему действует однородная сила тяжести, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз (см. рисунок 2).

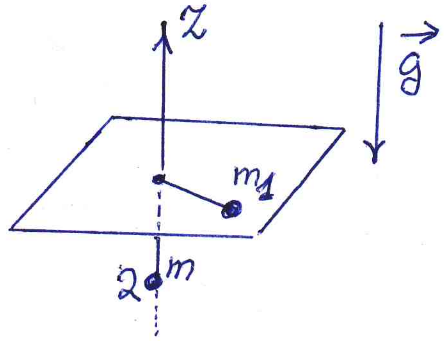


**Рисунок 2.**

а) Выберите обобщенные координаты и составьте Лагранжиан системы.

б) Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа и найдите решения, стационарные по координате частицы 2.

в) Воспользовавшись законом сохранения энергии, перейдите к эффективной одномерной системе и постройте ее фазовый портрет.

**3.** Механическая система "качели-карусели" состоит из двух жестких, невесомых, нерастяжимых стержней длины $R$ и $\ell$. Стержень $R$ закреплен одним концом в начале координат $O$ и может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси $O\vec{z}$. Второй стержень $\ell$ одним своим концом шарнирно закреплен на свободном конце стержня $R$ и может вращаться в вертикальной плоскости, проходящей через ось $O\vec{z}$ и стержень $R$. На свободном конце стержня $\ell$ закреплена частица массы $m$. На систему действует однородная сила тяжести, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено против оси $O\vec{z}$ (см. рис. 3).

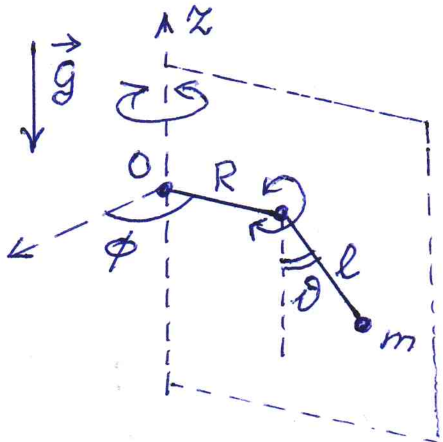


**Рисунок 3.**

а) Составьте Лагранжиан системы, используя в качестве обобщенных координат углы $\phi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [-\pi, \pi)$, нулевое значение угла $\theta$ отсчитывайте от нижнего положения массы $m$ (см. рисунок 3).

б) Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа и определите стационарные по $\theta$ решения (то есть решения, для которых $\theta(t) = \theta_0 = \text{const}$). Сколько имеется таких решений в случае $R > \ell$ и в случае $R < \ell$?

в) Выпишите законы сохранения и, перейдя к эффективной одномерной системе, нарисуйте качественно ее фазовый портрет для случая $R > \ell$.

**4*.** Однородная тонкостенная цилиндрическая труба массы $M$ и радиуса $R$ катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Внутри этой трубы находится *сплошной* однородный цилиндр массы $m$ и радиуса $r < R$. Цилиндр $m$ может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности трубы $M$, не отрываясь от нее в процессе движения. На систему действует однородная сила тяжести, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено перпендикулярно горизонтальной поверхности (см. рисунок 4).

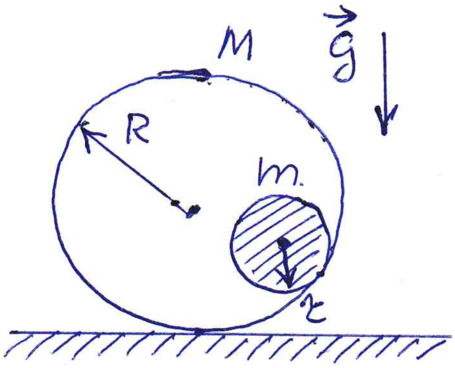


**Рисунок 4.**

а) Определите число степеней свободы и составьте Лагранжиан системы, выбрав подходящие обобщенные координаты.

б) Приведите выражения для всех имеющихся интегралов движения (законов сохранения).

в) Найдите угловую частоту малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

**Указание.** Для подсчета кинетической энергии системы используйте теорему о сумме кинетической энергии центра масс и энергии вращения вокруг него для трубы $M$ и цилиндра $m$ по отдельности.