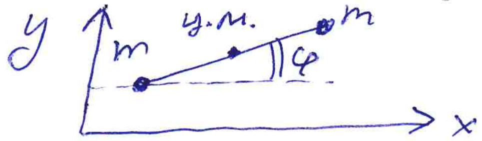
СЕМИНАР 8

Примеры лагранжевых механических систем

Пример 1. Давайте разберем совсем простой пример лагранжевой системы, чтобы проиллюстрировать применение законов сохранения и, помимо этого, обсудить некоторые следствия понятия "жесткий нерастяжимый стержень".

Наша модель представляет собой две одинаковые (для простоты формул) точечные массы m, соединенные невесомым нерастяжимым жестким стержнем длины $2l$. Эта система находится в плоскости $\mathbb{R}^2$, по которой может свободно двигаться в отсутствие внешних сил.

Число степеней свободы равно трем, в качестве обобщенных координат выбираем декартовы координаты центра масс (в данном случае он расположен в средней точке стержня) и угол ϕ между стержнем и, например, положительным направлением оси $O\vec{x}$.



Поскольку внешних сил нет, то Лагранжиан совпадает с кинетической энергией системы, которую легко выписать, пользуясь теоремой о движении центра масс и относительном движении:

$$L = T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + ml^2\dot{\phi}^2.$$

В данной системе имеется 4 интеграла движения: три интеграла отвечают циклическим координатам x, y и ϕ и четвертый интеграл — полная энергия $E = T$. Поскольку число степеней свободы равно трем, то только три из этих интегралов функционально независимы. Рассмотрим интегралы, отвечающие циклическим координатам

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}, \qquad P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{y}.$$

Эти интегралы представляют собой декартовы компоненты полного импульса системы

$$\vec{P} = 2m\vec{V}_{\text{ц.м.}}, \quad \vec{V}_{\text{ц.м.}} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y.$$

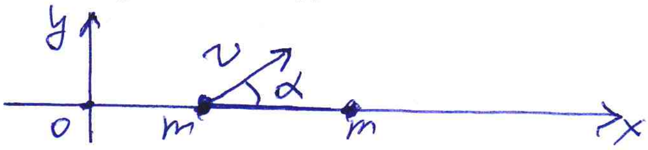
Третий интеграл

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2ml^2\dot{\phi}$$

представляет собой z-компоненту момента импульса, который всегда перпендикулярен плоскости движения системы.

В силу постоянства интегралов P_x, P_y и J мы сразу определяем *общее решение* уравнений движения: центр масс системы (средняя точка стержня) движется по прямой с постоянной скоростью $\vec{V}_{\text{ц.м.}}$, при этом сам стержень равномерно (то есть, с постоянной угловой скоростью $\dot{\phi}$) вращается вокруг центра масс. В данном случае система центра масс оказывается инерциальной и в этой системе отсчета грузы на концах стержня движутся по окружности радиуса l с постоянной угловой скоростью. Конкретные параметры этого общего решения однозначно фиксируются начальными данными.

Рассмотрим пример. Стержень с грузами покоится в декартовой системе отсчета плоскости $\mathbb{R}^2$ и в некоторый момент одному из грузов мгновенно сообщается скорость v, направленная под углом α к стержню. Нужно определить параметры последующего движения системы. Пусть в момент удара стержень был расположен вдоль оси $O\vec{x}$.



Найдем сначала скорость центра масс. Заметим, что условие несжимаемости стержня означает, что в любой момент времени проекции скоростей *всех* точек стержня на его направление имеют одно значение, в противном случае расстояние между точками стержня изменялось бы, что противоречит его нерастяжимости. Поэтому, если в начальный момент один из грузов получил скорость с компонентой $v\cos\alpha$ вдоль стержня, в этот же момент все точки получают такую же скорость (в том числе, и второй груз на другом конце стержня). Таким образом, значение компоненты скорости центра масс $\dot{x}$ оказывается равным

$$\dot{x} = v\cos\alpha,$$

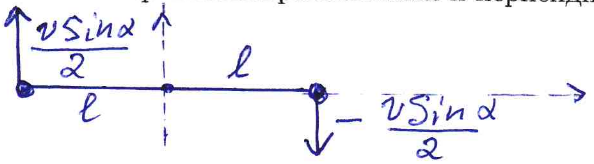
что, конечно, согласуется с формулой $\dot{x} = P_x/2m$, поскольку $P_x = 2mv\cos\alpha$ — оба груза получают одинаковый импульс $mv\cos\alpha$ вдоль стержня.

Вторая компонента скорости

$$\dot{y} = \frac{P_y}{2m} = \frac{v}{2}\sin\alpha.$$

Это связано с тем, что жесткий стержень не испытывает деформации изгиба и не изменяет y-компоненту скорости второго груза — она остается равной нулю в начальный момент и импульс по направлению оси $O\vec{y}$ целиком сосредоточен в первом грузе, по которому нанесен удар: $P_y = mv\sin\alpha$.

Итак, значения $\dot{x}$ и $\dot{y}$ определяют направление и скорость движения середины стержня. Чтобы найти угловую скорость движения, перейдем в систему центра масс. Скорости грузов в начальный момент в этой системе оказываются противонаправленными и перпендикулярными стержню:



Это означает, что в системе центра масс стержень вращается с угловой скоростью

$$\dot{\phi} = \frac{v\sin\alpha}{2l}.$$

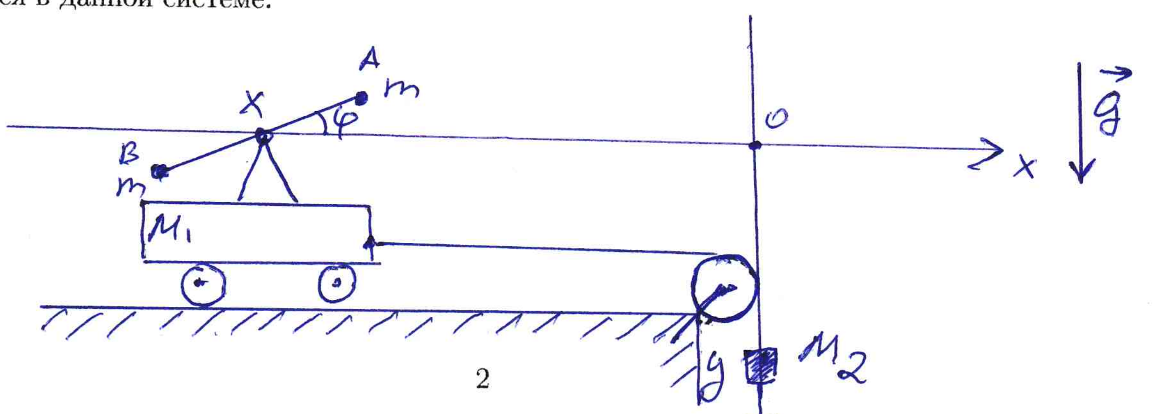
Пример 2. Разберем решение последней задачи из контрольной работы I.

Тележка массы M_1 может без трения двигаться по прямой по поверхности горизонтального стола. На тележке шарнирно закреплен жесткий невесомый стержень длины $2l$, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости, параллельной линии движения тележки. Шарнирное крепление расположено в геометрическом центре стержня. На концах стержня закреплены одинаковые точечные массы m. Невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, соединяет тележку с грузом M_2, который двигается вдоль вертикальной прямой. Система находится в однородном постоянном поле тяжести $\vec{g}$, направленном вертикально вниз (см. рисунок).

а) Определите число степеней свободы системы.

б) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте Лагранжиан системы.

в) Выпишите формулы для всех сохраняющихся величин (интегралов движения), которые имеются в данной системе.



Система, очевидно, обладает двумя степенями свободы. Зафиксируем декартову прямоугольную систему координат как показано на рисунке. В качестве обобщенных координат удобно выбрать x-координату центра стержня (это x-координата центра масс подсистемы, состоящей из стержня и двух масс m на его концах) и угол поворота стержня ϕ относительно положительного направления оси $O\vec{x}$. Выразим координаты всех тел системы через пару обобщенных координат x и ϕ.

Тележка совершает одномерное движение и ее координату отождествим с x. В силу нерастяжимости нити, координата y груза M_2 отличается от x на константу:

$$y = x + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \dot{x}.$$

И, наконец, декартовы координаты грузов A и B на концах стержня выражаются в виде:

$$\begin{aligned} x_A &= x + l\cos\phi \quad y_A = l\sin\phi \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_A = \dot{x} - l\dot{\phi}\sin\phi \quad \dot{y}_A = l\dot{\phi}\cos\phi \\ x_B &= x - l\cos\phi \quad y_B = -l\sin\phi \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_B = \dot{x} + l\dot{\phi}\sin\phi \quad \dot{y}_B = -l\dot{\phi}\cos\phi. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия подсистемы “стержень с грузами” выражается, таким образом следующей формулой:

$$T_{AB} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) = m\dot{x}^2 + ml^2\dot{\phi}^2.$$

Отметим, что последнее выражение можно было бы написать сразу, пользуясь теоремой о разложении киненетической энергии твердого тела в сумму кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии отностельного движения.

Чтобы получить полную кинетическую энергию системы, нужно к T_{AB} добавить кинетическую энергию тележки M_1 и груза M_2:

$$T = T_{AB} + \frac{M_1\dot{x}^2}{2} + \frac{M_2\dot{y}^2}{2} = \frac{M_1 + M_2 + 2m}{2}\,\dot{x}^2 + ml^2\dot{\phi}^2.$$

Что же касается потенциальной энергии в поле тяжести, то необходимо учесть только потенциальную энергию груза M_2, потому что потенциальная энергия тележки и *сумма* потенциальных энегрий грузов A и B остается постоянной в процессе движения. Итак,

$$U(x, \phi) = -M_2 g y = -M_2 g x + \text{const}.$$

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = T - U = \frac{M_1 + M_2 + 2m}{2}\,\dot{x}^2 + ml^2\dot{\phi}^2 + M_2 g x.$$

В системе есть два интеграла движения. Один из них отвечает циклической координате ϕ и имеет физический смысл момента импульса вращения грузов на стержне:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2ml^2\dot{\phi} = \text{const}.$$

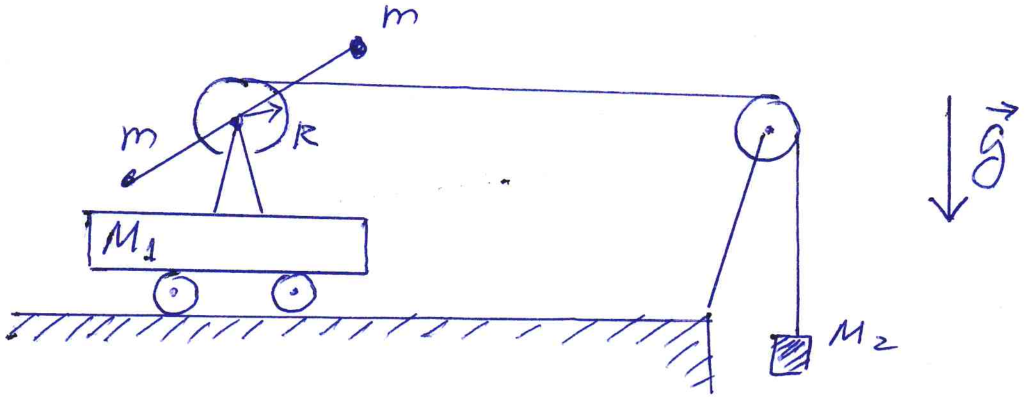
Из этого закона сохранения следует, что стержень с грузами всегда вращается с постоянной угловой скоростью, независимо от движения тележки.

Второй интеграл движения есть полная механическая энергия системы, сохранение которой гарантируется отсутствием явной зависимости Лагранжиана от времени:

$$E = T + U = \frac{M_1 + M_2 + 2m}{2}\,\dot{x}^2 + ml^2\dot{\phi}^2 - M_2 g x = \text{const}.$$

Пример 3. Изменим слегка условие только что разобранной задачи и убедимся, что не любой выбор формально равноценных обобщенных координат действительно удобен для анализа поведения механической системы. Один такой пример — движение частицы по поверхности параболоида — мы уже разбирали на прошлых семинарах. Тогда мы увидели, что полярные координаты на плоскости гораздо удобнее декартовых координат.

Пусть теперь нить с грузом M_2 присоединена не непосредственно к тележке M_1, а наматывается (сматывается) с невесомого блока радиуса R, который жестко связан с вращающимся стержнем $2l$ с массами на концах (см. рисунок ниже).



По сравнению с предыдущей задачей изменится связь координаты x центра масс стержня с грузами A и B с координатой y груза M_2:

$$y = x + R\phi + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = \dot{x} + R\dot{\phi}.$$

Здесь мы принимаем соглашение, что вращение *по часовой стрелке* отвечает *увеличению* угловой координаты ϕ, область изменения которой удобно считать бесконечной в обе стороны $\phi \in (-\infty, +\infty)$. Если взять как в прошлом примере в качестве пары независимых обобщенных координат значения x и ϕ, то Лагранжин системы будет даваться следующим выражением:

$$L = \frac{M_1 + 2m}{2}\dot{x}^2 + ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{M_2}{2}(\dot{x} + R\dot{\phi})^2 + M_2 g(x + R\phi).$$

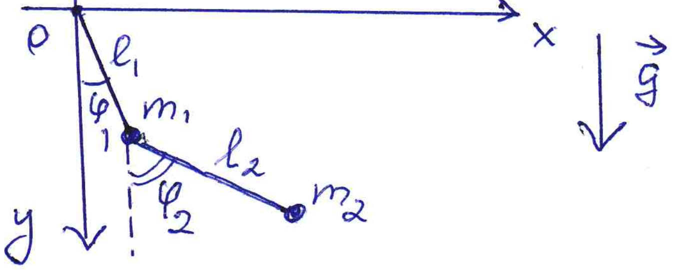
Мы видим, что Лагранжиан зависит от обеих обобщенных координат (циклических координат нет), и мы можем указать только один интеграл движения — полную механическую энергию E, а не два интеграла как было в предыдущем примере. В данном случае проблема решается совсем просто, надо только немного изменить выбор независимых обобщенных координат. Действительно, Лагранжиан зависит только от линейной комбинации $x + R\phi$ в выражении потенциальной энергии груза M_2. Поэтому более удобным является выбор y и ϕ в качестве независимой пары обобщенных координат (можно взять и пару y и x). В этом случае Лагранжиан перепишется в виде:

$$L = \frac{M_1 + 2m}{2}(\dot{y} - R\dot{\phi})^2 + ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{M_2}{2}\dot{y}^2 + M_2 g y.$$

С таким выбором обобщенных координат Лагранжиан не зависит от ϕ и кроме полной энергии E мы снова находим второй интеграл движения, отвечающий циклической координате ϕ:

$$\tilde{J} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const}.$$

Пример 4. Следующий пример посвящен системе, которая называется плоский двойной маятник (см. рисунок). Слово "плоский" означает, что грузы m_1 и m_2, а также соединяющие их жесткие невесомые стержни при движении все время остаются в одной и той же плоскости.



Невесомый жесткий стержень l_1 шарнирно прикреплен к точке O, которую мы выберем в качестве начала декартовой системы координат, и может свободно вокруг нее вращаться. К массе m_1 на конце этого стержня шарнирно прикреплен второй стержень l_2, на другом конце этого стержня находится точечная масса m_2.

Система имеет две степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать углы ϕ_1 и ϕ_2, которые образуют стержни l_1 и l_2 с осью ординат $O\vec{y}$. Для построения Лагранжиана, необходимо переписать кинетическую и потенциальную энергии системы в терминах обобщенных координат. Как обычно, начинаем с выражения декартовых координат грузов:

$$x_1 = l_1 \sin\phi_1, \quad y_1 = l_1 \cos\phi_1, \qquad x_2 = l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2, \quad y_2 = l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2.$$

Переходя к скоростям, получаем выражение для кинетической энергии плоского двойного маятника:

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_1 + m_2}{2}\, l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

Потенциальная энергия в поле тяжести является суммой энергий масс m_1 и m_2:

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) g l \cos\phi_1 - m_2 g l_2 \cos\phi_2.$$

Лагранжиан системы $L = T - U$ представляет собой сложное выражение, зависящее от всех обобщенных координат и, в общем случае, мы можем сразу написать только один, очевидный, интеграл движения — закон сохранения энергии $E = T + U$.

Интересная дополнительная возможность возникает в отсутствие поля тяжести $\vec{g} = 0$. Реализовать эту возможность на практике не трудно: наш двойной маятник должен вращаться в горизонтальной плоскости (например на поверхности гладкого стола) и тогда влияние силы тяжести компенсируется силами реакции плоскости.

Итак, если $g = 0$, то Лагранжиан совпадает с кинетической энергией:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\, l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

В такой записи циклических координат нет, но обратите внимание, что Лагранжиан зависит только от *разности* угловых координат. Если мы сделаем замену координат $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_1 - \phi_2$ (или, обратив эту замену, $\phi_1 = \psi_1$, $\phi_2 = \psi_1 - \psi_2$), то Лагранжиан перепишется так:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\, l_1^2\dot{\psi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)\cos(\psi_2).$$

Координата ψ_1 стала циклической и можно выписать еще один интеграл движения (наряду с полной энергией $E = T$:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_1} = \text{const}.$$

Этот пример еще раз напоминает, насколько важно удачно выбрать обобщенные координаты системы для последующего успешного анализа ее поведения.